UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA Y ORGANIZACIÓN ESCOLAR

TESIS DOCTORAL

Enseñanza de la matemática a alumnos con necesidades visuales: estrategias y metodologías dinamizadoras del aprendizaje

Ensino de matemática a alunos con necessidades visuais: estratégias e metodologías dinamizadoras da aprendizagem

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Artur Olímpio Ferreira Gonçalves da Silva

Director

José María Ruiz Ruiz

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Departamento de Didáctica y Organización Escolar

Doctorado

en

Innovación Didáctica en la Sociedad del Conocimiento

ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA A ALUMNOS CON NECESIDADES VISUALES: ESTRATEGIAS Y METODOLOGÍAS DINAMIZADORAS DEL APRENDIZAJE

Ensino da Matemática a Alunos com Necessidades Visuais: Estratégias e Metodologias Dinamizadoras da Aprendizagem

Autor: Artur Olímpio Ferreira Gonçalves da Silva

Director: Profesor Doctor José María Ruiz Ruiz

Madrid, 2015

TABLA DE CONTENIDOS

A mis nietos

Leonor,
Diogo,
Joana,
Miguel,
Tomás
y Pedro.

“La igualdad nace no porque somos todos iguales, sino porque usamos nuestras diferencias para suplir las necesidades unos de otros y para promover la armonía y la solidaridad”

Augusto Cury

Agradezco muy reconocidamente

- al Profesor Doctor José María Ruiz Ruiz por aceptar con presteza el dirigir y orientarme en esta Tesis de Doctorado, a pesar de su intensa actividad profesional; y sobre todo por estar siempre disponible para apoyarme en cuanto precisé;

- al Profesor Doctor Félix Sagredo Fernández, por su gran ayuda en los contactos con de la Facultad de Educación de la UCM y, también, por su gran disponibilidad para revisar la Tesis;

- al Profesor Doctor Augusto Deodato Guerreiro por el apoyo, estímulo y esclarecimientos que me ha proporcionado;

- al Profesor Doctor António da Silva Mendes por su gran disponibilidad para apoyarme en todo lo que solicité;

- al Presidente de la Dirección de la APEDV, Profesor Aquilino Rodrigues, por haber acogido con gran receptividad mi propuesta de llevar a efecto la acción de formación referida en esta Tesis; por su prontitud en leer, de forma crítica, algunos capítulos de esta monografía y, también, como Administrador de la empresa ElectroSertec Lda., haberme facililtado un Multiplano;

- a las Dras. Carminda Pereira y Graça Hidalgo, respectivamente, Directora Administrativa y Directora Pedagógica de la APEDV, por el apoyo que me proporcionaron para que la acción de formación pudiese ser llevada a efecto;

- a los seis alumnos del curso de 2012/2014 de telefonista/recepcionista de la APEDV por la disponibilidad en participar en la acción de formación;

- al Dr. António Pinão, psicólogo de la APEDV, por su acompañamiento muy cercano en toda la acción de formación;

- a la Profesora Sandra Pinheiro, de la Universidad Lusófona de Lisboa, por su disponibilidad para leer, de forma crítica, algunos textos de apoyo y soporte a la formación relativa a esta Tesis;

-a la Dra. Ana Paula Sousa, doctoranda en Didáctica del Braille, por sus esclarecimientos en lo que concierne a la Enseñanza del Braille, en Portugal;

- a la Profesora Maria Rei, de la Escuela Secundaria Gago Coutinho, por su disponibilidad en leer, de forma crítica, la tercera parte de la Tesis;

- a los hermanos Albertino y Luís Silva por proporcionarme algunos dispositivos metálicos que yo ideé para la acción de formación;

- a la Profesora Doctora Patrícia Xufre G. Silva, de la Facultad de Economía de la Universidad Nueva de Lisboa, por su disponibilidad en leer, de forma crítica, algunos capítulos de la Tesis y por haber traducido el resumen en inglés;

- a Leonor por su disponibilidad para traducir al inglés el resumen ampliado de la Tesis;

- a Lisete por su permanente apoyo e incentivo y así como, siempre en mi pensamiento, a nuestros tres hijos Gonçalo, Patrícia y Laura;

- a mis padres.

RESUMO

O problema relativo à presente Tese de Doutoramento tem o seguinte enunciado: *“ O ensino da matemática, através da utilização de estratégias e metodologias dinamizadoras da aprendizagem, nos cursos profissionais da APEDV, potencia as competências dos formandos?”.*

Este trabalho de investigação, que constitui um Estudo de Caso, contemplou uma acção de formação na disciplina de Matemática impartida, de modo informal, a seis alunos do curso telefonista/recepcionista da Associação Promotora de Emprego de (Pessoas) Deficientes Visuais (APEDV), e realizada desde fins de Outubro de 2012 a fins de Março de 2013, durante 30 horas.

A Tese divide-se em três partes: Marco Teórico, Contexto (da Investigação) e Desenho Experimental. No Marco Teórico foram abordados os temas Currículo em Geral, Sistema Braille, Tiflotecnologias e Inclusão Escolar; no Contexto é feita uma caracterização da APEDV e o Desenho Experimental contemplando dois capítulos intitulados, o primeiro, “Metodología: Estudo de Caso” e o segundo, “Conclusões. Proposta de Currículo”.

Em “Metodologia: Estudo de Caso” é feita uma descrição da acção de formação, das estratégias e metodologias utilizadas, das capacidades que se pretendem desenvolver, dos recursos materiais postos à disposição dos formandos, bem como dos resultados da avaliação. Por sua vez, em “Conclusões. Proposta de Currículo”, são evidenciadas as conclusões, é feita uma proposta de currículo para uma disciplina de Matemática a ser inserida nos cursos da APEDV, de telefonista/recepcionista e massagista/fisioterapeuta

Como palavras-chave foram utilizadas as seguintes: Aprendizagem, Braille, Competência, Currículo, Ensino da Matemática, Formando da APEDV, Inclusão, e Pessoa com Necessidades Visuais e Tiflotecnologia

RESUMEN

El problema relativo a la presente Tesis de Doctoral tiene el siguiente enunciado: *“¿La enseñanza de la matemática, a través de la utilización de estrategias y metodologías dinamizadoras del aprendizaje, en los cursos profesionales de la APEDV, potencia las competencias de los alumnos?”.*

Este trabajo de investigación que constituye un Estudio de Caso, contempló una acción de formación en la asignatura de Matemáticas, enseñada de modo informal, a seis alumnos del curso telefonista/recepcionista de la Asociación Promotora de Empleo de (Personas) Discapacitados Visuales (APEDV), y realizada desde finales de Octubre de 2012, a finales de Marzo de 2013, durante 30 horas.

Se divide en tres partes: Marco Teórico, Contexto (de la Investigación) y Diseño Experimental. En el Marco Teórico fueron abordados los temas Currículo en General, Sistema Braille, Tiflotecnologias e Inclusión Escolar; en dicho Contexto se realiza una caracterización de la APEDV y del Diseño Experimental contemplando dos capítulos intitulados, el primero, “Metodología: Estudio de Caso” y el segundo, “Conclusiones. Propuesta de Currículo”.

En “Metodología: Estudio de Caso” se hace una descripción de la acción de formación, de las estrategias y metodologías utilizadas, de las capacidades que se pretenden desarrollar, de los recursos materiales puestos a disposición de los alumnos, así como de los resultados de la evaluación. A su vez, en “Conclusiones. Propuesta de Currículo”, se evidencian las conclusiones, y se hace una propuesta de currículo para una asignatura de Matemáticas que va a ser insertada en los cursos de la APEDV, de telefonista/recepcionista y masajista/fisioterapeuta.

Como palabras clave fueron utilizadas las siguientes: Aprendizaje, Braille, Competencia, Currículo, Enseñanza de la Matemática, Inclusión, Formando de la APEDV, Persona con Necesidades Visuales y Tiflotecnologia.

ABSTRACT

The problem discussed in this PhD thesis can be stated as follows: *"Does the use of motivators learning strategies and methodologies to teach mathematics to students of the development professional courses of APEDV (Association for the Promotion of Employment of visually impaired people), enhance their competences?"*

The case-study research was based in the results obtained from the experience of teaching a module of mathematics to a group of six students, from Telephonist/ Receptionist Training Course, during 30 hours (October 2012 - March 2013).

The work presented in this thesis can be divided essentially into three parts: the theoretical framework, the research context and experimental design. In the theoretical framework, it is discussed the Curriculum Issues, the Braille System, Assistive Technologies and Inclusive Education. A description of the main activities of the APEDV is made in the Research Context. The Experimental Design consists of two topics: The Case-study Methodology and Main Conclusions and New Curriculum Proposal.

In "The Case-study Methodology" is made a full description of the module, the strategies and methodologies used, the competencies that are intended to develop, the material resources available to trainees as well as the evaluation results. In the chapter dedicated to "Main Conclusions and New Curriculum Proposal" several conclusions resulting from the experience are drawn up and it is presented a new Curriculum Proposal to the Telephonist/ Receptionist and Massage Therapist / Physiotherapist Training Courses offered by APEDV.

Keywords: Learning, Braille, Curriculum, Competence, Mathematics Teaching, Inclusion, Student from APEDV, Visually Impaired People and Assistive technology for Blind People.

CLAVE DE ABREVIATURAS, SIGLAS Y ACRÓNIMOS: SU SIGNIFICADO

3

3D	Tridimensional

A

AAICA	Associação de Apoio à Informação a Cegos e Amblíopes
ACAPO	Associação de Cegos e Amblíopes de Portugal
ANPEQ	Agência Nacional Para a Qualificação e o Ensino Profissional
AP	Actividad Práctica
APEC	Associação Promotora do Ensino dos Cegos
APEDV	Associação Promotora de Emprego de Deficientes Visuais
APM	Associação de Professores de Matemática
ASCII	American Standard Code for Information Interchange

C

CAD	Computer Aided Designer
CAF	Common Assessment Framework
CB	Comissão do Braille
CD	Compact Disk
CE	Conclusión Específica
CG	Conclusión General
cm	Centímetro
CRNSA	Centro de Reabilitação Nossa Senhora dos Anjos
Coord.	Coordinador

D

DECO	Associação Portuguesa para a Defesa do Consumidor
DREAL	Direcção Regional do Alentejo
DREC	Direcção Regional do Centro

DRELVT	Direcção Regional de Lisboa e Vale do Tejo
DREN	Direcção Regional do Norte
DVD	Disco Versátil Digital

E

ECTS	European Credit Transfer and Accumulation System
EDUSER	Revista de Educação
Ed.	Edición
EFQM	European Foundation for Quality Management
Et al	Y otro(s)

F

FCUL	Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

G

GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação
G.E.U.	Grupo Editorial Universitário

H

H	Altura de un triángulo o altura de un sólido geométrico
http	Hipertext Transfer Protocol

I

INTERNET	INTERnational NETwork
ISPA	Instituto Superior de Psicologia Aplicada

K

Kg	Kilogramo

L

LAMBDA	Linear Access to Mathematic for Braille Device and Audio-synthesis

Ltd.	Limitada

M

m	Metro
MEC	Ministério da Educação e Ciência
mm	Milímetro
MOODLE	Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment

N

NUT	Nomenclatura de Unidades Territoriais - para fins estatísticos

O

OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico
OCR	Optical Character Reader
OE	Objectivo Específico
OG	Objectivo General
ONCE	Organización Nacional de Ciegos *de España*

P

PALOP	Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa
PISA	Programme for International Student Assessment
PLA	Ácido Poliláctico
pp.	Páginas
PT	Portugal Telecom
p.	Página

S

SNRIPD	Secretariado Nacional para a Reabilitação e Integração das Pessoas com Deficiência
SPM	Sociedade Portuguesa de Matemática
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences

S.A.	Sociedad Anónima

U

UCM	Universidad Complutense de Madrid
UITI	Universidade Internacional da Terceira Idade
ULHT	Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias
UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
URL	Uniform Resource Locator

W

Web	Forma simplificada de World Wide Web

0 - INTRODUCCIÓN

En la actualidad, y en las más diversas áreas del conocimiento, con los cambios que se producen a un ritmo tan acelerado, el acceso a la información es condición indispensable para que cada ciudadano pueda estar convenientemente insertado en la sociedad de la que forma parte. Este hecho es aún más evidente cuando el ciudadano está en edad de desempeñar una actividad profesional, o preparándose para entrar en la vida laboral.

De acuerdo con la terminología de la Programación Neurolinguística[1], las personas, por lo general, para percibir el mundo que las envuelve, utilizan, de forma paralela, los sistemas visual, auditivo y kinestésico, abarcando este último los subsistemas táctil, olfativo y gustativo. Teniendo en cuenta que el sistema visual, por sí mismo, proporciona aproximadamente el 80% de la información, fácilmente se constata la situación de enorme desigualdad en que se encuentran las personas discapacitadas visualmente, en general, y las que son ciegas, en particular, en comparación con los demás ciudadanos.

La situación de desventaja para acceder a la información, en que se encuentran las personas con necesidades visuales especiales, se refleja, por supuesto, en el acceso a una adecuada formación escolar y, consecuentemente, en el acceso al mercado laboral. En este contexto, indicamos que en Portugal, a finales de 2012, la tasa de desempleo para la globalidad de la población en edad activa era de 16,3%, de acuerdo con los datos oficiales, y de aproximadamente el 75,0% para las personas portadoras de algún tipo de discapacidad, según el Presidente de la Confederación Nacional de Organizaciones de Personas con Discapacidad y, de acuerdo con estimativas contrastadas por esta institución. ¡Estos números, sólo por sí mismos, ya son muy esclarecedores!

A lo largo de los años, muchos ciudadanos tienen la profunda convicción de que las personas con necesidades especiales, en particular las que son ciegas, pueden ser tan útiles a la sociedad como la generalidad de sus conciudadanos,

[1] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 9).

siempre que, naturalmente, la sociedad proporcione los recursos que les ayuden a concretizar sus potencialidades, por lo que han dedicado sus vidas en la búsqueda de soluciones para auxiliar a sus conciudadanos con necesidades especiales, a mitigar la situación de desventaja en que se encuentran.

Así fue como el Dr. Assis Milton Ovidio Rodrigues, preocupado con la promoción sociocultural y profesional de personas con necesidades visuales especiales, ya hace unos 35 años, más precisamente en 24 de julio de 1980, tomó la iniciativa de crear una institución llamada Asociación Promotora del Empleo para Discapacitados Visuales, conocida por la abreviatura APEDV y que, actualmente, tiene la condición de Institución Privada de Solidaridad Social.

Al ser profunda convicción propia el que la enseñanza/aprendizaje de la Matemática proporciona a algunos, en general, y a los que tienen necesidades especiales, en particular, una excelente oportunidad para que se consideren ciudadanos más aptos, bien sea según una perspectiva individual, o sea según una perspectiva social y, con mi propio conocimiento de que en los cursos profesionales de la APEDV no son impartidos conocimientos de Matemática, he considerado, como propio, el problema que constituye el núcleo de la presente investigación y cuyo enunciado es el siguiente:

"¿La enseñanza de la matemática, a través de la utilización de estrategias y metodologías dinamizadoras del aprendizaje, en los cursos profesionales de la APEDV, potencia las competencias de los alumnos?".

Ante este problema, tomé la iniciativa, en Octubre de 2012, de contactar con la Dirección de la APEDV y de manifestar mi gran interés en proporcionar a los alumnos de esta institución, un curso de Matemática, en el que contemplaría dos módulos: uno de Geometría y otro de Estadística.

Con el estudio de la Geometría, debidamente reforzado con aspectos de la Aritmética y del Álgebra, tienen la posibilidad de ampliar y profundizar las capacidades de abstracción y de conceptualización e, incluso la posibilidad de poder tornar más fácil la construcción de mapas mentales que, particularmente las personas ciegas, sientan la necesidad de utilizar cuando, en el mundo real, se desplazan de un punto a otro. Con el estudio de la Estadística, pueden ampliar el crecimiento de capacidades sociocognitivas muy importantes para una adecuada comprensión de los fenómenos socioeconómicos y sociopolíticos, en la actual sociedad del conocimiento.

Conjugar esfuerzos para promover la inclusión social de personas con necesidades educativas especiales es, seguramente, la expresión de un deseo de satisfacer el deber de ciudadanía. Es, por tanto, también, con este espíritu, con el que se encuadra la presente Tesis Doctoral, que incide sobre el tema enunciándolo así: "Enseñanza de las matemáticas a los estudiantes con necesidades visuales: estrategias y metodologías dinamizadoras del aprendizaje", registrado en el Facultad de Educación - Departamento de Didáctica y Organización Escolar de la Universidad Complutense de Madrid, integrado en el programa "Innovación Didáctica en la Sociedad del Conocimiento".

La presente tesis doctoral, que ha tenido como Director al Profesor Doctor José María Ruiz Ruiz, de la misma Facultad, está estructurada de la siguiente forma:

-1ª parte: Marco Teórico, constituido por los capítulos 1 a 4, denominados, respectivamente, Currículo en General, El sistema Braille, Las Tiflotecnologias y La inclusión Escolar;

- 2ª parte, el Contexto de la Investigación, consiste en un solo capítulo, el 5º, titulado "La Asociación Promotora de Empleo para Discapacitadas Visuales”;

- 3ª parte: Diseño Experimental que consta de dos capítulos: 6 - Metodología: Estudio de caso y 7- Conclusiones. Propuesta de currículo.

En el capítulo 1, "Currículo en General", se ha dado realce a la etimología del término "currículo" y se realiza un encuadramiento histórico y contextual del origen e inicio de la introducción de este concepto en la educación, bien a nivel internacional bien en lo que respecta a Portugal. Después, se hacen referencias a las diferentes teorías curriculares y, en este ámbito, se constata la importancia de las obras: "El niño y el currículo", de 1902, de John Dewey y "The Curriculum", de 1918, debida a John Franklin Bobbitt y de 1949 "Principios de Currículo e Instrucción Básica" de Ralph W. Tyler.

Se describen también, las propuestas para la clasificación de las teorías curriculares presentadas por Gimeno, J; William, F. Pinar, Zabalza, M.A.[2] y Tomaz Tadeu da Silva[3] y se evidencia que un modelo curricular es una entidad de ámbito teórico-práctico cuyo objetivo es permitir la aplicación de una teoría curricular a un contexto educativo en concreto.

A continuación, son descritas las principales características de los modelos cerrados, de los modelos abiertos y de modelos mixtos, estos último surgidos a partir de la década 80 del siglo pasado, con el objetivo de combinar las mejores características que los diversos autores encontraron en los modelos cerrados y en los abiertos. Se ofrece, también, una clasificación paradigmática de los modelos curriculares en: tecnológicos, deliberativos y críticos.

También, en el ámbito de los modelos curriculares, describo un modelo que pretende reflejar mi posición personal y, en este ámbito, presento algunas convicciones, la primera de las cuales refiere que: “El profesor no es solamente un mero transmisor de conocimientos sino, sobre todo, un educador y formador de ciudadanos conscientes e implicados” y, en la última instancia, señalo que la teoría y la práctica deben de ser consideradas dos facetas de la misma realidad, siendo el papel de la teoría, el de guiar y conducir la práctica a un nivel superior y, el papel de la práctica, el de permitir la validación de la teoría

[2] RUIZ J.M. (2005a, pp. 59 - 61).
[3] SILVA, Tomás Tadeu (2000, p. 16).

Realzo, también, adaptando una definición de currículo presentada por el Dr. Ruiz, J.M (2013) que, en mi opinión, es una forma sencilla de definir el currículo como un proyecto pedagógico-didáctico que se materializa esencialmente a través de acciones de enseñanza y aprendizaje.

Clasifico los currículos en niveles A, B, C y D, dependiendo de la entidad responsable de su elaboración, considerando como de nivel A, los currículos elaborados por las entidades superiores; de nivel B, los currículos realizados en los centros educativos; de nivel C, los currículos elaborados por los profesores para sus clases; y de nivel D, los currículos preparados por los profesores para poder aplicarlos a los estudiantes con características especiales, sean superdotados y/o tengan alguna discapacidad funcional.

En este capítulo se señalan las tres fases del currículo (diseño, desarrollo y evaluación) y se presentan ejemplos, con especial énfasis en un currículo de nivel D, diseñado para que un alumno ciego aprenda la noción de función, una de las más importantes en el ámbito de la Matemática.

También, en este capítulo, se hacen referencias a las principales metodologías de investigación que tienen al currículo como objeto de estudio.

En el capítulo 2, del Marco Teórico, "El Sistema Braille", empiezo con referencias históricas relacionadas con eventos que fueron fundamentales para que Louis Braille conciba el sistema de lectura/escritura táctil, que hoy en día, es mundialmente conocido por su nombre y que es genéricamente reconocido como el único medio "natural" y "universal" con el cual es posible que la persona ciega desarrolle hábitos estables de lectura/escritura.

Se describe la señal fundamental constituida por una matriz de 6 puntos, repartidos en 3 filas y 2 columnas y con base a lo cual se elaboran las 63 señales simples del Sistema Braille, describiendo también, las siete series por las cuales las señales se distribuyen.

Se evidencia que la combinación de dos o más señales simples dan origen a señales compuestas, ampliando, extraordinariamente, las potencialidades del sistema Braille, de tal modo que se construye un sistema de representación alfabética, simple, lógico y versátil, que puede ser utilizado en las diversas ramas del conocimiento.

Asímismo en este capítulo se evidencian cuáles son las señales compuestas utilizadas en las representaciones de las letras mayúsculas, de los números enteros, de los números fraccionarios, de los números ordinales, de los conjuntos numéricos, de las operaciones aritméticas, de los monomios y polinomios, de las ecuaciones algebraicas y de las operaciones trascendentales, así como de diversas entidades en el contexto de la geometría como: recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, semirrectas, segmentos de recta, triángulos, cuadrados, rectángulos, polígonos en general, la circunferencia y también símbolos del ámbito de la Lógica.

Se pone en claro el sistema Braille de ocho puntos, utilizado en los equipamientos informáticos, que fue diseñado para responder a una nueva realidad surgida como consecuencia de la aparición de los nuevos medios de comunicación e información.

Se mencionan también, los métodos de enseñanza de lectura/escritura del sistema Braille y en este contexto, como curiosidad, dado que que una persona con más de 16 años de edad, necesite aprender el sistema Braille y resida en la Región de la Gran Lisboa, pueda disponer de una formación personalizada a través de una institución adecuada para este propósito, el Centro de Rehabilitación de Nuestra Señora de los Ángeles (CRNSA), con sede en Lisboa.

Se indica también, que el CRNSA pertenece a la Santa Casa de la Misericordia de Lisboa y que, para una mejor integración de sus usuarios, coopera con otras instituciones, una de las cuales es la APEDV.

En el capítulo "Tíflotecnologias", que se divide en tres subcapítulos, el primero comienza por presentar las tiflotecnologias (tiflo significa relativo a persona ciega) como conjuntos de métodos y de técnicas especialmente diseñadas y desarrolladas para personas con disfunción visual, especialmente para que aquellas que no ven, puedan ayudarles a superar las dificultades causadas por tal disfunción y que surgen en la vida cotidiana. Como ejemplos iniciales son presentados un bastón provisto de un sensor, una máquina Perkins para escritura del Braille, un lector de libros que permite que un texto en caracteres normales se pueda convertir en formato de audio y/o formato braille, cuando el texto está siendo recorrido y, también como ejemplo, el multiplano que fue diseñado por el profesor brasileño Rubens Ferronato, como instrumento de trabajo útil en la enseñanza de las matemáticas.

El segundo subcapítulo está dedicado a las tiflotecnologias de la información y de la comunicación. En él nos referimos al Robobraille, que es un convertidor automático de archivos en formato texto a archivos en formato braille y/o audio; el Mecbraille que es un servicio gratuito que permite el intercambio de correspondencia tradicional entre personas normovisuales y personas ciegas; las máquinas de escribir Braille, los lectores de pantalla, que permitan que un texto escrito en una pantalla de ordenador, pueda oírse en virtud de un aparato llamado sintetizador de voz, que realiza la conversión de formato de texto a formato audio y, también, para Braille y ser leído en una línea de Braille. Tratamos, también, de las computadoras autónomas, los reconocedores de texto, los lectores Daisy, las impresoras Braille, las máquinas de relieves, las impresoras 3D, los teléfonos móviles, los ampliadores de caracteres y dos dispositivos reconocedores de monedas y de billetes.

El tercer, y último subcapítulo, está dedicado a las tiflotecnologias para la enseñanza de las matemáticas. En él nos referimos al editor de texto LAMBDA que permite a personas con necesidades visuales escribir, leer y manejar expresiones; el multiplano que consiste en placas de acrílico con agujeros, en los cuales pueden ser insertados alfileres, que pueden interconectarse con gomillas para obtener una figura plana que se propone estudiar como, por ejemplo, un triángulo; la calculadora científica de altavoz SCI; el Cubaritmo que es útil para las operaciones aritméticas; y materiales del ámbito de la Geometría como un conjunto de sólidos geométricos y un kit de la ONCE, que contiene diversos instrumentos, entre los que constan, con graduaciones en relieve, las reglas y el transportador.

En el capítulo: "La Inclusión Escolar", el último del Marco Teórico, se describe cómo se llega hasta la presente “Era de la Inclusión” realizando, para este efecto, referencias a cuatro acontecimientos de gran significado: (1) la Declaración Universal de los Derechos Humanos; (2) la Conferencia Mundial sobre “Educación para Todos”, realizada en Jomtien; (3) la Conferencia Mundial "Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad", realizada en Salamanca y el (4) Congreso Internacional de Educación Especial, efectuado en Birmingham. Se hacen también diversas consideraciones con respecto a la ya larga trayectoria que ha recorrido la Educación, hasta llegar a los tiempos actuales, donde ya existe una gran sensibilidad para la inclusión de alumnos con necesidades especiales en las escuelas regulares.

En este subcapítulo se describe la perspectiva de ilustre tiflólogo Dr. Orlando de Jesús Monteiro y lo que de más relevante ocurrió en Portugal, desde la enseñanza en las escuelas específicas, hasta la inclusión escolar en las instituciones de educación regular.

También, en el subcapítulo, propio describo una experiencia personal que tuve como Presidente del Consejo Directivo de la Escuela Secundaria, Gago Coutinho, en Alverca do Ribatejo y relativa a la integración, en la comunidad escolar, de una persona parapléjica.

En el penúltimo subcapítulo se hacen referencias relativas a la Educación Matemática donde se evidencia el papel de la Matemática, a la par de la Lengua Materna, bien como área estructurante del conocimiento, bien como lenguaje de comunicación en muchos dominios del saber. Procuro, también, evidenciar que el profesor de Matemática, además de preocuparse por tener la preparación científica adecuada para la enseñanza, debe, también, preocuparse por estimular el sentido crítico, bien entre sus alumnos o entre sus semejantes.

En el último subcapítulo son hechas consideraciones relativas a las competencias y a las capacidades siendo realzadas las competencias que los profesores deberán potenciar bien como aquellas que los alumnos deberán desarrollar.

La segunda parte de la Tesis: el Contexto de la Investigación, consta de un único capítulo dedicado a la institución donde transcurrió la parte práctica de la misma, la Asociación Promotora del Empleo para Discapacitadas Visuales (APEDV). Se muestran algunos aspectos históricos relativos a la creación de esta institución; después se describen sus objetivos fundamentales (ayudar en la búsqueda y creación de empleo, proporcionar apoyo escolar, promover su desarrollo deportivo, intelectual y cultural, prevenir la ceguera y contribuir a su bienestar general). Velar por la composición de la estructura dirigente y también la estructura organizativa de que se dota un Centro de Formación Profesional y un Centro Ocupacional de Ayuda.

En lo que se refiere al Centro de Formación Profesional, se describen los cursos ofrecidos en el mismo: telefonista/recepcionista, masajistas/Auxiliares de Fisioterapia y Cestería y Madera y, en lo que concierne al Centro Ocupacional de Apoyo, se pone de manifiesto que fue concebido para un máximo de 15 usuarios, que tienen la particularidad de ser personas con necesidades de ayudas visuales y también, portadoras de otras limitaciones, de tal manera que, a estos usuarios se les proporcionan actividades que pretenden estimular su creatividad, para que puedan evolucionar a su propio ritmo.

En la tercera parte de la Tesis: Diseño Experimental, en el capítulo 6, "Metodología: Estudio de Caso", se hacen referencias generales relativas a metodologías cuantitativas versus metodologías cualitativas y se demuestra que en la investigación se utilizó una metodología cualitativa, con un tratamiento de la información según la técnica del Estudio del Caso, que se centró en una institución con características muy especiales: la APEDV

Se señala que fue impartido un programa de matemática entre el 30 de octubre de 2012 hasta el 26 de marzo de 2013, todos los martes, de 9h00 a 10h30, con un total de 30 horas, impartido a la clase del curso de Telefonista/recepcionista, constituida por 2 estudiantes ciegos y 4 de ellos con baja visión, y que tuvo un carácter puramente informal, ya que los programas oficiales de los cursos de la APEDV no contemplan la asignatura de Matemática.

Se realza, también, que los temas impartidos incidirán en el ámbito de la Geometría, por ser facilitadora de la construcción de mapas mentales, que las personas ciegas sienten necesidad de elaborar cuando, en el mundo real, se mueven de un punto a otro. Además, fueran evidenciadas las metodologías presentadas, así como las capacidades que se pretendieron desarrollar

En lo que respecta a la evaluación, y teniendo en cuenta el carácter meramente informal del curso de matemáticas impartido, se tuvo la preocupación de, en modo alguno, herir la sensibilidad de los alumnos, para evitar que su autoestima, ya de por sí de un nivel poco elevado, en estas circunstancias, podría ser afectada de forma no deseable. Así, destacamos que, al principio del curso la evaluación de diagnóstico se hizo, individualmente, a través de una conversación informal y que, durante el curso, sin que los estudiantes, explícitamente, se diesen cuenta de que estaban siendo evaluados; y fueron, en determinados momentos, expuestas cuestiones cuyas respuestas yo clasifiqué a través de tres niveles: la nota 3 cuando el estudiante respondió con autonomía; la nota 2 cuando el estudiante necesitaba de un poco de ayuda por mí parte; la nota 1, cuando el estudiante necesita de mucha ayuda para dar con una respuesta correcta. En suma, los estudiantes respondieron correctamente a todas las preguntas, y lo que varió fue el grado de ayuda que les proporcioné.

En sección propia, se hacen consideraciones sobre los términos “capacidad” y “competencia” y en la sección final se presentó un presupuesto para remodelar una vivienda, que fue propuesto a los alumnos. Inicialmente, en conjunto, los alumnos elaboraron un presupuesto relativo a la piscina; después, cada formando tuvo la tarea de hacer el presupuesto para una determinada parte y, a continuación, también en conjunto, elaboraron el presupuesto general.

Finalmente, en el último capítulo: “Conclusiones. Propuesta de Currículo", se exponen las conclusiones juzgadas pertinentes y se presenta una propuesta para un currículo de una asignatura de matemáticas a impartir en el primer año de los dos cursos que la APEDV imparte, el de masajista/fisioterapeuta y el de telefonista/recepcionista. En el currículo, a desarrollar durante un año académico (de abril a marzo del año siguiente), se evidencian las intenciones, los contenidos programáticos a enseñar, los materiales facilitadores del aprendizaje y las recomendaciones entendidas como adecuadas, para que el desarrollo del currículo y la evaluación sean realizados de modo conveniente.

Se proponen, también, dos líneas de investigación relativas la primera, a la producción de materiales adecuados a la enseñanza de las personas ciegas a través de impresoras 3D y, la segunda, incidiendo sobre Estrategias y Metodologías Dinamizadoras del Aprendizaje a Alumnos con Necesidades Visuales, en la Enseñanza de la Matemática, utilizando el profesor un cuadro interactivo con posibilidad de que, de forma interactiva, cambiar y compartir información con sus alumnos, trabajando cada uno de ellos con una computadora portátil provista de lector de pantalla y/o de línea Braille, en el caso de los alumnos ciegos, y de ampliador de pantalla, en el caso de alumnos de baja visión.

MARCO TEÓRICO

1 - CURRICULO EN GENERAL

> *"La alegría no llega sólo con el encuentro de lo hallado sino que forma parte del proceso de búsqueda. Y enseñar y aprender no se pueden dar fuera de ese proceso de búsqueda, fuera de la belleza y de la alegría".*
>
> *Paulo Freire*

1.1 - INTRODUCCIÓN

La palabra "currículo" [4] tiene, etimológicamente, su origen en la palabra latina *curriculum* que significa carrera. Cabe señalar que una carrera, desde la más simples a la más compleja, incluye cuestiones como las siguientes que se indican:

1) ¿Cuál es su finalidad?
2) ¿Dónde se realiza?
3) ¿Cuándo se realiza?
4) ¿Quién organiza?
5) ¿Quién la dirige?
6) ¿Quién participa?
7) ¿Qué normas deben ser observadas?
8) ¿Cómo evaluar el trabajo de quienes participan en ella?

El uso de la expresión currículum, asociado a la educación, y para designar los temas a estudiar, se hizo por primera vez en 1633, en la Universidad de Glasgow, Escocia, comenzando a aparecer, con gran relevancia, en los Estados Unidos de América del Norte, con la publicación de las obras: "The Child and the Curriculum" en 1902, de John Dewey y "The Currículum ", en 1918, de John Franklin Bobbitt.

En Portugal, el uso de la palabra currículo, en el sentido de "currículo escolar", según la información proporcionada por el sitio portugués Ciberdúvidas (Ciber

[4] *Currículo*. In Infopédia Porto: Porto Editora, 2003-2012. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sítio <URL: http://www.infopedia.pt/$curriculo>, accedido en 10 de marzo de 2012.

dudas)[5], de la Lengua Portuguesa, aparece mencionado en 1899, en la primera edición del Nuevo Diccionario de Lengua Portuguesa, del lexicógrafo portugués Cándido de Figueiredo, como regionalismo brasileño refiriéndose a “programación total o parcial de un curso o de una materia que va a ser examinada”, además de otras acepciones como “acto de correr” o “atajo”.

Sólo muy recientemente la expresión currículo, en el sentido descrito anteriormente, por efectos de la literatura educativa de los Estados Unidos de América del Norte, se ha utilizado en países europeos como Alemania, España, Francia y Portugal.

En concreto, en lo referente a Portugal, hasta 1975, el término *currículo* apenas se utilizaba en la vida cotidiana, apareciendo en su lugar la palabra *currículum* en el contexto de la expresión "curriculum vitae". En ese año, en virtud de la legislación relativa a la formación de profesores, la palabra en cuestión es mencionada, de manera indirecta, a través de la expresión ”desarrollo curricular"[6].

Desde finales de la década de 80 del pasado siglo la palabra *currículo* ya se mencionaba, de forma explícita, como se puede ver, por ejemplo, en *“…por el currículo que define el conocimiento tenido como valido…*”[7] y, también, en el título de la obra de la ASSOCIAÇÃO DE PROFESORES DE MATEMÁTICA (1988): *Renovação del currículo de la Matemática*. Lisboa. Associação de Profesores de Matemática.

Muchos han sido los significados asignados a la palabra *currículum* pudiendo señalar, hasta relativamente hace poco tiempo, que los anglosajones la utilizaban para designar las doctrinas relativas al arte / ciencia de bien enseñar, mientras los europeos del continente, para los mismos propósitos, utilizaban la palabra *didáctica*[8].

---

[5] Ciberdúvidas de la Lengua Portuguesa. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.ciberduvidas.pt/search.php?keyword=curriculo&image.x=0&image.y=0>, accedido en12 de marzo de 2012.
[6] *Currículo*. In Infopédia [En línea]. Porto: Porto Editora, 2003-2012. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.infopedia.pt/$curriculo>, accedido en 10 de marzo de 2012.
[7] COSTA, M. Lurdes (1981, p. 605).
[8] idem.

Desde mi punto de vista, adaptando lo referido en Ruiz Ruiz (2005a, p. 125), pienso que es más apropiado considerar currículo (en el sentido del currículo escolar) como *un proyecto pedagógico-didáctico que se materializa, principalmente, a través de acciones de enseñanza-aprendizaje*.

Cada currículo, para que cumpla su misión correctamente, necesita estar insertado en un proyecto más amplio llamado proyecto educativo, del cual el currículo es el núcleo central. Este proyecto más amplio, además de la dimensión pedagógico didáctica, incluye otras dos dimensiones: la sociocultural y la administrativo/organizativa.

La dimensión sociocultural evidencia las necesidades educativas que las comunidades presentan y a las cuales el currículo tiene que dar respuesta. A su vez, a través de la dimensión administrativo/organizativa, se proporcionan los medios, humanos y materiales, de modo que el currículo pueda ser llevado a la práctica

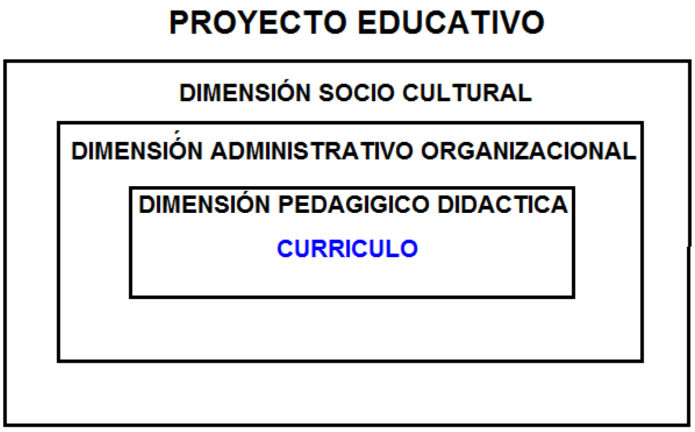


Figura 1.1-01: El currículo como núcleo central de un proyecto educativo.

El currículo, como objeto específico de la investigación educativa, surge como consecuencia del pensamiento progresista en educación, para hacer de la actividad escolar un cometido riguroso, eficaz y socialmente fructífero[9].
Contempla tres etapas fundamentales:

Fase 1 (diseño o planificación):
- los objetivos son explicitados;

[9] RUIZ J.M. (2005a, p. 33).

- se define un plan de acción
- son dadas las directrices generales para la concretización del plan;

Fase 2 (concretización o desarrollo):
- el plan se pone en práctica a través de la implementación de currículos más pequeños y, en última instancia, a través esencialmente de acciones de enseñanza / aprendizaje;

Fase 3 (evaluación del proyecto):

- se hace un análisis crítico de los resultados que servirán de soporte a la toma de decisiones que podrán conducir

a) a la introducción de mejoras en el proyecto y/o en los participantes en el proyecto;
b) a una nueva formulación del proyecto;
c) a la sustitución del proyecto por otro considerado más conveniente.

Para aclarar lo que se menciona en la 2ª fase debe de indicarse que la concretización curricular, como lo evidencia Ruiz Ruiz (2005a, p. 114), se lleva a cabo en cuatro niveles distintos: ministerial, centro educativo, en la sala de clase e individual. Para estos diferentes niveles de concretización curricular los vamos a designar como A, B, C y D.

- a los currículos de responsabilidad ministerial, porque tienen mayores dimensiones, clasificándolos como currículos de nivel A;

- a los currículos que son de responsabilidad de un centro educativo los clasificamos como de nivel B, siendo tales currículos elaborados según las directrices de un currículo de nivel A, y teniendo en cuenta, naturalmente, el contexto socio-cultural en que el centro de educación se integra;

- los currículos diseñados por los profesores para ser implementadas en el aula están, por supuesto, de acuerdo con las reglas definidas por un currículo de nivel B. Estos currículos se clasifican como de nivel C o D teniendo en cuenta lo siguiente:

- de nivel C, cuando se destinan a una determinada clase;

- de nivel D, cuando son diseñados para estudiantes de forma individual. En este caso, tienen lugar los casos en que el estudiante presenta una discapacidad que impide los procesos normales de enseñanza / aprendizaje, tales como la audición; y / o visuales, como las situaciones en las cuales el estudiante sea superdotado.

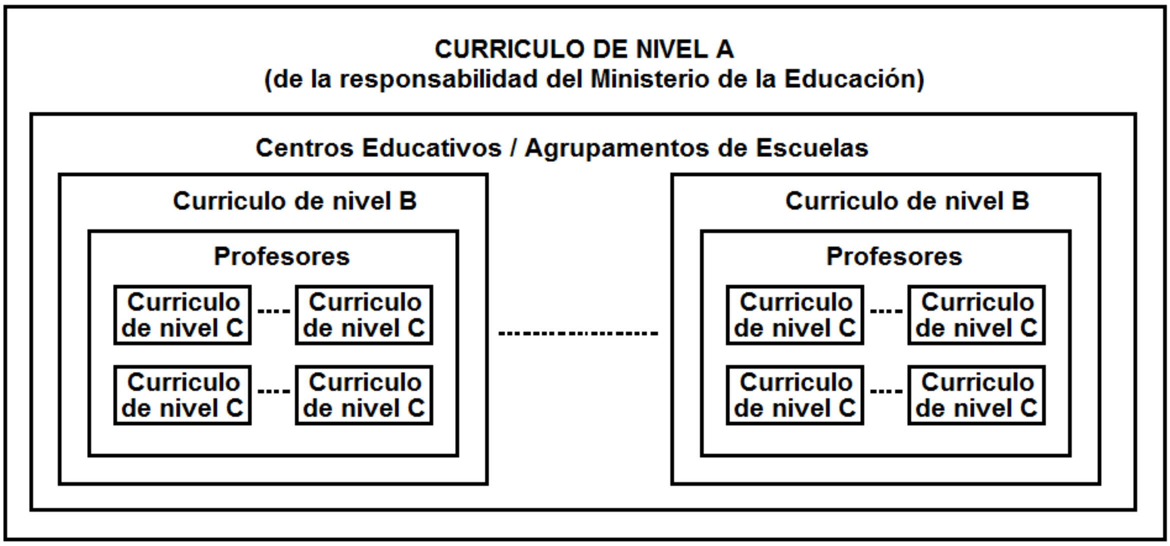


Figura 1.1-02: Esquema evidenciando las relaciones entre los diferentes niveles de currículos.

En el subcapítulo siguiente se hará referencia a las teorías del currículum, ya que sólo ellas permiten obtener una mejor comprensión de los procesos educativos, no solamente como transmisores de conocimiento, sino también, como transmisores de intenciones y de significados, implicando, incluso, relaciones de poder.

1.2 - TEORÍAS CURRICULARES

Las teorías curriculares se encuadran en las ciencias sociales, con énfasis particular en las ciencias de la educación, y es uno de sus objetivos fundamentales dar respuesta a la siguiente cuestión central[10]:

"¿para un cierto tipo de sociedad, cuáles son los conocimientos que deben ser proporcionados a las generaciones más jóvenes, para que sean ciudadanos que se adapten mejor a esa sociedad?"

Para responder a esta pregunta, en cada teoría se hacen reflexiones sobre el ser humano, el aprendizaje, el conocimiento, la cultura y la sociedad. El grado de importancia que cada teoría asigna a cada uno de estos aspectos es lo que la distingue de las demás[11].

En cada teoría, después de se haber recibido una respuesta a la pregunta central enunciada anteriormente, es decir, después de se haber hecho la selección del conjunto de conocimientos entendido como más adecuado y después de evidenciar las razones para tal selección, también se describen los fundamentos para cuándo y cómo dichos conocimientos deben ser proporcionados.

El surgimiento de las primeras teorías curriculares se produce con la publicación de las obras "The Child and the Curriculum", en 1902, de John Dewey y "The Curriculum", en 1918, de John Franklin Bobbitt, ya mencionadas en el subcapítulo anterior. Estas obras muestran que los dos autores tenían perspectivas muy diferentes sobre el papel de la educación. Así, mientras que para Dewey la educación debería ser entendida como una preparación para la vida democrática, para Bobbitt la educación debería funcionar de acuerdo con los principios[12] de gestión científica propuestos por Frederick Taylor[13].

---

[10] SILVA, Tomás Tadeu (2000, p.13).
[11] Ídem.
[12] Principio del planeamiento, principio de la preparación de los trabajadores, principio de control y principio de la ejecución.
[13] SILVA, Tomás Tadeu (2000, p.18).

De las dos obras mencionadas, la que mayor impacto obtuvo fue la de Bobbitt de tal manera que se considera un marco en el establecimiento del currículo como un campo especializado de estudios[14]. En este trabajo, el currículo se define como

"*conjunto de experiencias que permiten que los alumnos se adapten a la vida de los adultos en sociedad*"[15]

Este concepto científico de currículo fue aclarado y ampliado por Ralph W. Tyler, en " *Basic Principles of Curriculum and Instruction*", publicado en 1949. En ella el autor muestra que quien planifica debe interrogarse, por lo menos, sobre cuatro cuestiones fundamentales[16]:

- ¿Qué aprendizaje se pretende que los alumnos alcancen? (Objetivos);
- ¿Qué experiencias educativas deben ser proporcionadas para obtener esos objetivos? (Actividades);
- ¿Qué recursos se deben utilizar? (Recursos Educativos)
- ¿Cómo se puede determinar si los alumnos han logrado sus objetivos? (Evaluación)

Para Tyler el currículo comprende todas las experiencias de aprendizaje debidamente planificadas y dirigidas por la escuela para alcanzar los objetivos educativos establecidos de antemano.

En las últimas décadas ha habido varias propuestas para la clasificación de las teorías curriculares. Para resaltar este hecho se presentan, a modo de ejemplo, las clasificaciones establecidas por **Gimeno**, J**.**, William F. **Pinar**, **Zabalza**, M. A. y Tomaz Tadeu de la **Silva**. Los tres primeros ejemplos son citados por Ruiz J.M. (2005a, pp. 59-61) mientras que el último puede verse en Silva, Tadeu Tomás (2000, p. 16).

[14] SILVA, Tomás Tadeu (2000, p.18).
[15] RUIZ, J. M. (2005a, pp. 24).
[16] GARAY (2004).

Gimeno, J. clasifica las teorías en cinco grandes grupos[17]:

G1. El currículo como una estructura organizada de conocimiento.
G2. El currículo como un sistema tecnológico de producción.
G3. El currículo como un plan de estudios.
G4. El currículo como un conjunto de experiencias de aprendizaje.
G5. El currículo como solución de problemas.

En el grupo G1 hay tres posiciones teóricas distintas:

G1A. *esencialismo y peremnialismo*[18]: el currículo se considera un programa estático y con carácter permanente, convirtiéndose en una asignatura formal para desarrollar la mente y entrenar la inteligencia.

G1B *reforma del currículo y la estructura de las asignaturas*[19]: considera que el currículo estructura el conocimiento científico en cuerpos organizados de conocimientos y de principios transmitidos académicamente.

G1C *desarrollo de modos de pensamiento*[20]: el currículo se entiende como un proyecto de contenidos y de métodos capaces de desarrollar modos originales y peculiares de pensamiento.

En el grupo G2 se encuadran las teorías que consideran el currículo como una declaración, sea de objetivos de aprendizaje, sea de competencias que deben ser alcanzadas. Además las unidades de contenidos que constituyen el currículo están organizadas jerárquicamente[21].

En el grupo G3 el currículo se caracteriza por incluir objetivos, contenidos, actividades y estrategias de evaluación siendo considerado como una planificación racional de la intervención didáctica.

---

[17] RUIZ, J. M. (2005a, p. 59).
[18] Citando (Bestor, 1956).
[19] RUIZ J.M. (2005a, p. 59), citando (Bentey, 1970; Schvab, 1964 e Phenix, 1962).
[20] RUIZ J.M. (2005a, p. 59), citando (Belth, 1965).
[21] RUIZ J.M. (2005a, p. 59), citando (Gagné, 1986).

En el grupo G4 el currículo es considerado como un conjunto de oportunidades de aprendizaje que la escuela ofrece, incluidos las experiencias formales, es decir, aquellas que están debidamente explicadas, y las que no siendo formales[22], son facilitadoras del aprendizaje.

Por último, en el grupo G5 el currículo se entiende como un proyecto flexible que enuncia principios y directrices sobre contenidos y procesos relativos: el qué, el cómo y el cuándo darse la práctica escolar.

Para William F. **Pinar** las teorías curriculares se clasifican en[23]

P1. Tradicionalistas.
P2. Empirismo conceptual
P3. Reconceptualismo

Las teorías del grupo P1, se apoyan en la obra de Tyler " *Basic Principles of Curriculum and Instruction*" antes mencionada. A su vez, las teorías del grupo, basándose en estudios realizados por el sociólogo R. Merton, se caracterizan por utilizar métodos idénticos a los de las ciencias sociales. Por último, las teorías del grupo P3, elaboran el currículo basado en una perspectiva crítica cargada de valores, con el objetivo de proporcionar una emancipación política

Para **Zabalza**, M. A. las teorías curriculares se clasifican en[24]

Z1. Currículo como normativa.
Z2. Currículo como un conjunto de oportunidades de aprendizaje.
Z3. Currículo como proceso educativo.

Las teorías del grupo Z1 encaran el currículo como una estructuración de estudios que los alumnos deben realizar en los diferentes niveles de la enseñanza.

---

[22] Las que constituyen el currículo oculto.
[23] RUIZ J.M. (2005a, p. 60).
[24] Idem.

Para las teorías del grupo Z2 el currículo se entiende como un conjunto de oportunidades de aprendizaje que es proporcionado a los alumnos con el fin de alcanzar determinados objetivos formativos.

El tercer grupo entiende el currículo como un proceso educativo que debe de ser desarrollado en contextos específicos de enseñanza

Por último, para Tomaz Tadeu de la **Silva**[25] las teorías curriculares se clasifican en tres grupos, de acuerdo con los conceptos a los que dan mayor énfasis.

S1. Tradicionales.
S2. Críticas
S3. Post-críticas.

En el grupo S1 los conceptos que se evidencian son: enseñanza, aprendizaje, evaluación, metodología, didáctica, organización, planificación, objetivos y eficiencia.

En el segundo grupo, las expresiones con mayor realce son: ideología, reproducción cultural y social, poder, clase social, capitalismo, relaciones sociales de producción, conciencialización, emancipación y liberación, currículo oculto y resistencia. Como nota se señala que para la expresión "currículo oculto" Tomaz Tadeu de la Silva la define de la siguiente manera[26]:

"El currículo oculto se compone de todos aquellos aspectos del ambiente escolar, que sin formar parte explícita del currículo oficial, contribuyen de forma implícita para aprendizajes sociales relevantes".

En tercer y último grupo las teorías curriculares dan énfasis a: identidad, alteridad, diferencia, subjetividad, significación y discurso, saber-poder, representación, cultura, género, raza, etnia, sexualidad y el multiculturalismo.

---

[25] SILVA, Tomaz Tadeu (2000, p.16).
[26] SILVA, Tomaz Tadeu (2000, p. 82).

Al final del subcapítulo anterior escribí: *"... los procesos educativos, no solamente como transmisores de conocimiento sino como, también, transmisores de intenciones y de significados que comprenden, incluso, relaciones de poder*".

A propósito del término "poder" es interesante transcribir de Tomaz Tadeu de la Silva, lo siguiente[27]:

> "... *En las teorías poscríticas, el conocimiento no es externo al poder, el conocimiento no se opone al poder. El conocimiento no es lo que pone en jaque el poder: el conocimiento es una parte inherente del poder (...) la teoría poscrítica debe de combinarse con la teoría crítica, para ayudarnos a entender los procesos mediante los cuales, a través de las relaciones de poder y control, nos convertimos en lo que somos. Ambos los han enseñado, de diferentes maneras, y que el currículo es una cuestión de saber, identidad y poder*".

[27] SILVA, Tomaz Tadeu (2000, pp. 153 -154).

1.3 - MODELOS CURRICULARES

1.3.1 - Definición de modelo curricular

Un modelo curricular es una entidad de índole teoricopráctico cuya finalidad es posibilitar la aplicación de una teoría curricular dada a un contexto educativo en concreto. A tal efecto el modelo hace referencia a un conjunto de reglas y de normas relativas a las actividades y a los criterios inherentes al trabajo curricular que debe llevarse a efecto.

En el subcapítulo 1.1 referí que el currículo contempla tres fases fundamentales: concepción o diseño, concretización o desarrollo y evaluación. La figura siguiente evidencia, en lo que concierne a los campos teórico, teoricopráctico y práctico, en cuál de ellos se sitúa, sea la teoría curricular, sea el modelo curricular, sea, también, cada una de las fases del currículo.

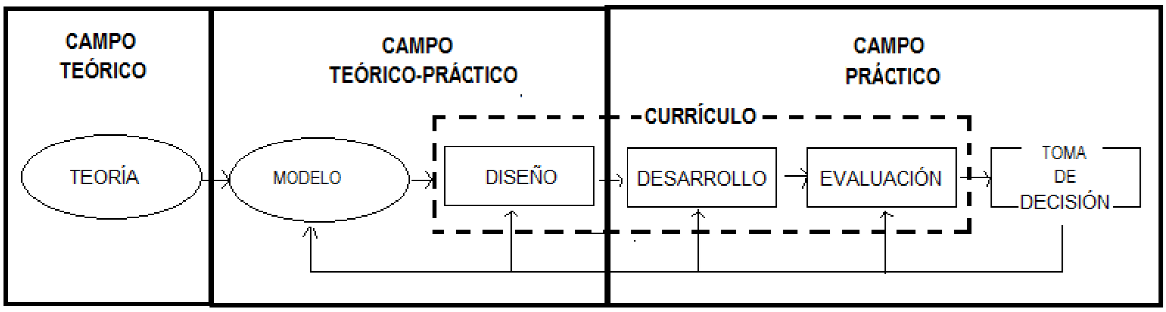


Figura 1.3-01: Teoría curricular, modelo curricular y fases del currículo.

Una teoría, sea ella curricular o de cualquier otro tipo, se concibe, naturalmente, en el campo teórico. Un modelo curricular, siendo la interpretación de una teoría curricular, con vista a la su implementación en una realidad práctica dada, se sitúa en el campo teoricopráctico. El diseño del currículo, que tiene como base un modelo elaborado, previamente, identifica en su esencia lo que se va enseñar, cuándo se va enseñar y cómo se va enseñar. Tal se hace, pues, en el contexto teoricopráctico. El desarrollo del currículo y la evaluación son fases del currículo inherentes a un contexto práctico.

Después de la fase de evaluación, y considerando un análisis crítico de los resultados, podrán ocurrir tomas de decisión, que podrán justificar cambios, más o menos significativos, en cada una de las fases del currículo y, también, en última instancia, justificar la introducción de cambios en el propio modelo que ha servido de base a la elaboración del currículo.

1.3.2 - Modelos cerrados versus modelos abiertos

En el ámbito de la educación, en cuanto a puntos globales, se evidencian dos líneas de orientación determinantes[28]:

1ª) el currículo es un plan de formación tecnológica que debe de tener en cuenta que la instrucción escolar tiene por finalidades la preparación y el desarrollo de capacidades necesarias en la práctica escolar. En esta vertiente se destacan Bobbitt (considerado el primero teórico sobre currículos) y Tyler, ya mencionados anteriormente;

2ª) el currículo es un plan de formación para la a vida por lo que debe de contemplar las necesidades, sea del desarrollo infantil , sea de formación, que proporcionen a cada uno el acceso a una vida adulta autónoma. En esta línea de orientación, su primer gran representante fue Dewey que defendió que el currículo no debería estar dividido en materias separadas.

Los modelos curriculares relativos a teorías que se encuadran en la primera línea de orientación se dicen modelos cerrados, mientras los otros son llamados modelos abiertos o flexibles.

En los modelos cerrados las estructuras y los elementos son determinados por las entidades superiores, y son, normalmente, definidos por expertos en temas educativos. Más tarde, en los diversos centros educativos, los currículos elaborados en esos contextos siguen, muy de cerca, las orientaciones. Estos modelos son típicos de los países latinos y, también, lo fueron en los Estados Unidos de América del Norte, en las primeras décadas del pasado siglo, para

[28] RUIZ J.M. (2005a, p. 53).

responder a la masificación de la escolarización[29] que ocurrió como consecuencia de los grandes movimientos inmigratorios necesarios para suportar el desarrollo del país en los sectores primario y secundario de la actividad económica.

Uno de los modelos cerrados con mayor proyección, utilizado durante las décadas 30 a 60 del siglo pasado, fue diseñado por el estadounidense Ralph W Tyler (1902-1994). Este modelo contempla los siguientes siete pasos fundamentales[30]:

1º identificar los objetivos del programa educacional. (Los objetivos se definen de conformidad con las demandas de la sociedad y teniendo en cuenta las características de los alumnos);

2º clasificar los objetivos en una de las diez categorías siguientes

a) desarrollar un método efectivo de pensamiento
b) cultivar hábitos de trabajo y conductas de estudio;
c) adquirir una amplia gama de intereses;
d) inculcar actitudes de socialización;
e) desarrollar capacidades para la apreciación del arte y de experiencias estéticas;
f) desarrollar una sensibilidad social;
g) desarrollar un mejor ajuste personal a la sociedad en que el estudiante está insertado;
h) estar disponible para la adquisición de información;
i) desarrollar la salud física;
j) desarrollar una filosofía consistente de vida;

3º desarrollar cada objetivo en términos conductuales

4º identificar las situaciones en que los objetivos son alcanzados;

[29] SILVA, Tomás Tadeu (2000, p. 11).
[30] DURÁN, Erica (s/d).

5º seleccionar y diseñar formas para probar métodos de evaluación;

6º desarrollar y mejorar las técnicas de satisfacción cuando los objetivos son alcanzados;

7º interpretar los resultados obtenidos.

En los modelos abiertos no hay requisitos sobre la estructura y los elementos que componen el currículo. Por lo tanto, en estos modelos son los profesores de un centro educativo los que determinan en todas sus dimensiones el currículo a desarrollar en ese centro, y cada uno de ellos tiene autonomía para llevar a cabo las acciones pedagógico-didácticas que considere oportunas en relación a los estudiantes con quienes tienen de interactuar. Este modelo es típico de países anglosajones.

Una de los principales defensores de los modelos abiertos fue el inglés Lawrence Stenhouse (1926-1982). Él concibió un modelo de investigación-acción[31] propicio, para que los estudiantes desarrollen su actividad en debates abiertos sobre los problemas que se presentan, debiendo cada alumno, después de una reflexión adecuada, tomar una posición propia sobre cada problema. En este modelo, los profesores deben de ser investigadores de su propia práctica, es decir, de una manera sistemática deben de reflexionar sobre su práctica, e introducir los cambios que tales reflexiones sugieren. Este modelo propone que se consideren la teoría y la práctica como entidades estrechamente relacionadas.

1.3.3 - Modelos Mixtos

A partir de la década de los años 80 del siglo pasado se inició un proceso para definir los modelos que combinan las mejores características de los modelos abiertos y de los modelos cerrados que mejor pudieran adaptarse a cada situación en concreto. En estos modelos podemos darles la designación de

[31] RUIZ J.M. (2005a, p. 72).

modelos mixtos, modelos combinados[32] o modelos de currículo básico[33]. Se caracterizan por ser definido por un lado, a un nivel central, como un conjunto de directrices generales que permitan establecer un denominador común a los diversos centros educativos de una región dada, y, por otro lado, permitan que cada centro educativo tenga la autonomía adecuada para responder con su propio programa educativo a las necesidades de la comunidad educativa a que pertenece.

En Portugal, hasta finales de los años ochenta del siglo pasado, los currículos eran elaborados según los modelos cerrados. Desde el comienzo de la década siguiente si inició un proceso de apertura con el fin de dar a las escuelas una mayor autonomía. Sin embargo, por razones culturales, este proceso no ha sido fácil ya que la tradición va en la dirección de que todas las decisiones, por más insignificantes que sean, están sujetos a las orientaciones superiores.

Vencer la tradición necesita siempre de mucho tiempo, sin embargo, ello no debe ser obstáculo para que se camine hacia un cambio de actitud muy significativo. Para este efecto es necesario que los profesores, por un lado, tengan la percepción de que las autoridades superiores realmente quieren tal cambio y, por otro, que las mismas entidades los preparen, convenientemente, para aceptar las reformas que fueren consideradas convenientes.

Los cambios deben de hacerse, inicialmente, en un número limitado de escuelas y, después, terminado el período experimental, se debe siempre proceder a una conveniente evaluación que deberá incluir una discusión franca y abierta, con el fin de posibilitar mantener lo que está bien y cambiar lo que sea necesario.

En diciembre de 2011, el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) ha expuesto a debate público una propuesta para la **Revisión de la Estructura Curricular** en las Enseñanzas Básica y Secundaria, habiendo presentado el 03.26.2012 la

---

[32] RUIZ J.M. (2005a, p. 64).
[33] RUIZ J.M. (2005a, pp. 160-161).

versión final de esta revisión, con la indicación explícita de su entrada en vigor en el año lectivo de 2012-2013.

El documento en cuestión el MEC evidencia las siguientes intenciones:

1) asegurar la calidad de la enseñanza;
2) proporcionar el equilibrio del sistema educativo;
3) promover los valores fundamentales: *esfuerzo individual, esfuerzo colectivo, trabajo, rigor y la calidad de lo que se aprende*;
4) actualizar el currículo enfatizando la reducción de la dispersión curricular;
5) mejorar el acompañamiento de los estudiantes a través de una mejoría de la evaluación y detección temprana de sus dificultades;
6) dotar las escuelas de mayor autonomía pedagógica y organizativa en la gestión del currículo, una mayor libertad de elección de ofertas de formación debiendo, sin embargo, tener las decisiones un carácter de continuidad y en armonía con las del Ministerio.

Con miras a las intenciones mencionadas, en lo que concierne a medidas concretas, refiérense las siguientes:

1) reforzar asignaturas fundamentales, tales como la Lengua Portuguesa, la Matemática, la Historia, la Geografía, las Ciencias Físico-químicas y las Ciencias de la Naturaleza.

2) promover la enseñanza del inglés, manteniendo la pluralidad de la oferta de lenguas extranjeras así como las Expresiones;

3) mantener la Educación para la Ciudadanía como intención educativa en todas las áreas curriculares, pero no como asignatura aislada y obligatoria, señalándose, también, su carácter transversal.

4) en el decurso de la Educación Primaria y Secundaria, se deberá:

4.1) reforzar las áreas temáticas fundamentales;

4.2) afirmar la identidad de las asignaturas que se unen bajo el nombre de Expresiones (Educación Visual, Educación Musical, Educación Física y Educación Tecnológica);

4.3) garantizar un aprendizaje más consolidado de la Lengua Inglesa, haciendo de ella una asignatura obligatoria a lo largo de un mínimo de 5 años;

4.4) reforzar el carácter horizontal de la Educación para la Ciudadanía, estableciendo contenidos y orientaciones programáticas, pero no como asignatura de oferta obligatoria.

5) en el segundo ciclo de la educación básica se deberá:

5.1) sustituir la asignatura de Educación Visual y Tecnológica por dos asignaturas distintas: Educación Visual y Educación Tecnológica, cada una de ellas con su propio programa;

5.2) mantener la actividad experimental en las Ciencias Naturales, a realizar en todos los grupos.

6) para los tres ciclos de la educación básica se deberá

6.1) invertir en el conocimiento científico a través del refuerzo de horas de enseñanza de las ciencias experimentales;

6.2) cambiar el modelo del desdoblamiento de clases en las ciencias experimentales, a través de una alternancia entre las asignaturas de Ciencias Naturales y de Fisico-química;

6.3) proporcionar en los 7º y 8º años, una asignatura, por decisión de la escuela, de acuerdo con su proyecto educativo y teniendo en cuenta el contexto escolar en que se encuentra;

6.4) valorar el conocimiento social y humano, reforzando las horas de enseñanza en las asignaturas de Historia y de Geografía;

6.5) anticipar para el 7º año el aprendizaje de Tecnologías de la Información y Comunicación, garantizando a los estudiantes más jóvenes un uso apropiado de los recursos digitales y proporcionando condiciones para un acceso universal a la información;

6.6) mantener la oferta de una segunda lengua extranjera.

7) en la escuela secundaria, se tomarán las siguientes medidas:

7.1) reforzar la enseñanza del Portugués, con especial atención a la mejora de la capacidad del estudiante para comunicarse oralmente y por escrito;

7.2) mantener el refuerzo del número de horas lectivas en las asignaturas bianuales de formación específica en Física, Química, Biología y Geología;

7.3) mantener dos asignaturas opcionales anuales.

8) con vistas a la obtención de éxito por los alumnos deberán de tenerse en cuenta las siguientes medidas:

8.1) incrementar la igualdad de oportunidades, de homogeneidad relativa en las asignaturas estructurales, a lo largo de toda la Enseñanza Básica, teniendo en cuenta los recursos de la escuela y la relevancia de las situaciones;

8.2) fomentar, en el 1er. ciclo, en las áreas de Expresiones, la ayuda mutua entre profesores de otros ciclos de la misma Agrupación de Escuelas, que pertenecen a los grupos de reclutamiento de estas áreas;

8.3) promover en el 1er. ciclo un acompañamiento más eficaz mediante apoyos concretos, teniendo en cuenta el papel de los alumnos;

8.4) proporcionar un mayor acompañamiento a los estudiantes, a través de una oferta de Ayuda Diaria a los estudios en el 2º ciclo, siendo esta oferta obligatoria para la escuela y facultativa para los estudiantes designados por el consejo de clase y encargado de educación;

8.5) procurar el rigor en la evaluación para obtener datos fiables sobre el aprendizaje, a través de la introducción de **pruebas finales** en el 4º año y mantener las pruebas finales en el 6º y en el 9º en Portugués y en Matemática.

9) las escuelas, con el fin de reforzar su autonomía pedagógica y organizativa, deberán:

9.1) movilizarse para desarrollar la enseñanza, teniendo en cuenta los objetivos y los contenidos definidos en las Metas Curriculares y en los Programas de las asignaturas. Para este efecto, deberán tener en cuenta sus especificaciones y necesidades y los factores que las encuadran y condicionan, seleccionando, entre otros aspectos, las metodologías y la duración de los tiempos lectivos que se suponga sean más apropiados;

9.2) en el desarrollo curricular tomar en cuenta, por un lado, los principios generales establecidos, debiendo en su aplicación, adaptarse a las características de los alumnos y, por otro, acoger y crear las condiciones adecuadas para todos los estudiantes, tanto para superar las dificultades de aprendizaje como para desarrollar sus habilidades;

9.3) valorar las experiencias y las prácticas colaborativas que conduzcan A la mejoría de la enseñanza;

9.4) poner en práctica proyectos propios, teniendo en cuenta los recursos humanos y materiales de que disponen;

9.5) promover una educación de calidad;

9.6) dotarse de le mayor flexibilidad posible teniendo en cuenta la organización de las actividades escolares, aumentando la eficiencia en su distribución;

9.7) asumir la responsabilidad por las decisiones tomadas;

9.8) valorar los resultados escolares.

Por lo que queda apuntado, la Revisión de la Estructura Curricular para las Enseñanzas Básica y Secundaria, en Portugal, encuádrase, naturalmente, en un modelo mixto.

1.3.4 - Clasificación paradigmática de los modelos curriculares

Otra forma de clasificar los modelos curriculares consiste en considerar el paradigma con que son concebidos. En este ámbito los modelos se clasifican en tecnológicos-positivistas, deliberativos y críticos.

Los modelos tecnológicos-positivistas se caracterizan porque toda la actividad curricular debe de transcurrir en función de los objetivos que las escuelas deben alcanzar. En tales modelos son explicitados los contenidos y los medios para alcanzar tal desiderátum, siendo la educación entendida como el desarrollo de un conjunto de técnicas sistemáticas. Estos modelos tuvieron gran implementación desde los principios del siglo pasado hasta prácticamente la actualidad. Como ejemplos significativos hay que referirse a los modelos de Tyler, atrás descrito, y el de Hilda Taba.

En los modelos deliberativos, también, denominados simbólicos, los profesores están más próximos al dibujo curricular, lo que posibilita una mejor interconexión entre dibujo curricular, desarrollo del currículo, investigación y autoformación de los docentes[34]. En los modelos deliberativos hay, por tanto, subyacente una propuesta descriptiva y comprensiva de la actividad curricular, al contrario de la prescriptiva, típica de los modelos tecnológicos. Como ejemplos de modelos deliberativos[35] pueden citarse el modelo práctico de Schwab, el modelo naturalista de Walker, el modelo investigación-acción de Stenhouse, el modelo constructivo de Ausubel y el modelo descriptivo de Sanders.

Finalmente, los modelos críticos, también denominados sociocríticos, cuyos grandes defensores son Stephen Kemmis y McTaggart, se caracterizan por sugerir, en el ámbito de una dada comunidad educativa, una reflexión colectiva desde las prácticas docentes hasta los valores ideológicos dominantes, de modo que cada uno aprenda con las experiencias de los otros, y se sienta motivado para introducir cambios en su práctica, con miras a, naturalmente, la obtención de mejores resultados educativos y de, incluso, contribuir a cambios en la sociedad donde está integrado.

[34] RUIZ J.M. (2005a, p. 66).
[35] RUIZ J.M. (2005a, p. 62).

1.3.5 - Una Posición Personal

En términos personales me identifico con un modelo curricular que ponga su atención en lo siguiente:

1º) El profesor no es sólo un mero transmisor de conocimientos sino, sobre todo un educador y formador de ciudadanos conscientes e implicados.

2º) Me siento identificado con que el currículo contemple las expresiones que Tomás Tadeu de Silva refirió como típicas de los modelos tradicionales: *enseñanza, aprendizaje, evaluación, metodología, didáctica, organización, planificación, eficiencia y objetivos*. Además de eso, pienso que es más adecuado al currículo contemplar, también, expresiones como *concienciación*, *emancipación y liberación*, típicas de las teorías críticas, así como las expresiones *identidad, alteridad, diferencia, subjetividad, cultura, género, raza, etnia, sexualidad y multiculturalismo,* como caracterizadoras de las teorías postcríticas, e incluso, los términos AFECTIVIDAD e INCLUSIÓN que no vienen explicitados, por el autor atrás referido, en cada uno de los conjuntos de términos caracterizadores de los tres tipos de teorías curriculares presentados.

La explicitación del término AFECTIVIDAD me parece de gran importancia dado que la primera cognición que el ser humano tiene es la afectiva, debiendo esta componente del conocimiento estar, pues, siempre presente en todo los procesos de enseñanza-aprendizaje. En cuanto al término INCLUSiÓN, su explicitación debe ser evidenciada, pues todo el proceso educativo sólo tiene sentido si es inclusivo.

3º) Portugal es un país de dimensiones territoriales reducidas, con una fuerte entidad multisecular lo que se traduce en el hecho de que no sean muy significativas las diferencias culturales entre cualquier punto del territorio, como contrariamente sucede, por ejemplo, en otros países europeos como en Bélgica y Suiza que, teniendo dimensiones geográficas más reducidas, tienen diferencias culturales internas más profundas. Sin embargo, ello no invalida que las ofertas educativas puedan variar en dos localidades relativamente próximas. Por este hecho, cada centro educativo debe de prestar atención a que en la zona donde está asentado, como persona colectiva, sea de los que tienen mayor "know-how", por lo que deberán asumir un papel de liderazgo en la investigación y en el desarrollo de su región.

4º) Para la asignatura de Matemática, en el ámbito de las enseñanzas básica y secundaria defiendo, por las razones referidas en el punto anterior, que orientaciones muy generales sean definidas desde arriba para todo el país preconizándose que el objetivo fundamental de la enseñanza de la Matemática es desarrollar en los alumnos aptitud para el pensamiento matemático autónomo, por lo que deberá exigirse que se enseñen con total claridad, los conceptos fundamentales de la matemática con utilización de expresiones que, teniendo en cuenta el nivel de escolaridad en el que se encuentran los alumnos, se aproximen lo más posible a su sentido exacto.

Debe de ser estimulada, también, siempre que sea posible, la práctica de deducciones lógicas para habituar a los alumnos a hacer uso inteligente del método matemático en la interpretación del mundo físico. Se debe de destacar, que en cada Escuela deberán ser proporcionadas, por un lado, dentro de límites debidamente fijados, las adaptaciones que sean necesarias, teniendo en cuenta la región en que la Escuela está insertada, y por otro, que deberá ser exigido, por cada nivel de escolaridad, el que los contenidos programáticos impartidos nunca queden por debajo de un límite mínimo considerado indispensable para el aprendizaje del nivel de escolaridad siguiente. Deberá ser importante, también, el que para cada tema sean proporcionados ejemplos de aplicaciones prácticas, pues ello constituye un fuerte estímulo para el aprendizaje.

5º) Hoy en día, se está ya en plena sociedad de la información y de la comunicación, por lo que el contacto entre profesor y alumno deberá ir más allá de los tiempos lectivos consagrados al régimen presencial. Así, deberán ser incentivados el uso de las nuevas herramientas de la información y de la comunicación, como por ejemplo, las ciberredes sociales o la plataforma Moodle, que permita que de forma interactiva se apliquen a una profundización del proceso dialéctico profesor-alumno, así como de ayuda mutua entre los discentes. Considerando el crecimiento exponencial de la información en la WEB, el profesor, deberá de tener, en este ámbito, la constante preocupación de orientar a sus alumnos en el sentido de distinguir lo que es información útil, de aquella que no lo es.

6º) En lo que se refiere a la evaluación, el modelo deberá contemplar tanto la evaluación formativa como la sumativa, en las proporciones que cada centro educativo considere más apropiadas, siempre que, a mi entender, el porcentaje de una de las componentes nunca deba de exceder el triple del porcentaje atribuido a la otra, lo que significa que cada una de ellas deberá tener una ponderación comprendida entre el 25% y 75%. Además de eso, deberán existir pruebas nacionales, a finales de cada ciclo de estudios, de forma que se pueda evaluar la calidad educativa de cada escuela.

7º) La teoría y la práctica deben ser consideradas dos facetas de una misma realidad, siendo el papel de la teoría el de guiar y conducir la práctica a un nivel superior y el papel de la práctica el de permitir la validación de la teoría.

1.4 - FASES DEL CURRÍCULO

En el subcapítulo 1.1, he considerado ***currículo*** (en el sentido de currículo escolar) como *un proyecto pedagógico-didáctico que se materializa, esencialmente, a través de acciones de enseñanza-aprendizaje.* He referido, también, que los currículos pueden clasificarse en niveles A, B, C y D según la entidad responsable de su elaboración. Así, he considerado:

- de nivel A los currículos responsabilidad del Ministerio de Educación;

- de nivel B los currículos elaborados por los Centros Educativos (Escuelas, Grupos de Escuelas) y de acuerdo con las orientaciones del correspondiente currículo de nivel A; pudiendo existir algunas diferencias significativas según el modelo curricular practicado: abierto, cerrado o mixto. En cualquiera de las situaciones el diseño del currículo de este nivel debe contemplar:
    - los objetivos específicos relativos a cada tema a impartir;
    - los temas a enseñar acompañados de las planificaciones de largo, medio y corto plazos;
    - la definición de reglas de evaluación a las que los alumnos deben estar sujetos.

- de nivel C, los currículos elaborados por cada profesor, para un determinado grupo, de acuerdo con las recomendaciones del respectivo currículo de nivel B. En este ámbito es deseable que el currículo evidencie que el profesor tenga la permanente preocupación de reflexionar sobre las mejores prácticas didáctico-pedagógicas que deberá llevar a efecto, debiendo tener particular atención con los alumnos con necesidades particulares, bien sea por que manifiesten alguna discapacidad, o por manifestar sobredotación para el aprendizaje.

- de nivel D los currículos concebidos para alumnos, en particular, con especial realce para los que manifiesten tener necesidades específicas y/o para los que tengan especial inclinación por el aprendizaje.

1.4.1 - El Diseño del Currículo.

El diseño de un currículo contempla los siguientes aspectos:

(1) definición de un conjunto de intenciones;
(2) selección de los contenidos indispensables a la satisfacción de tales intenciones;
(3) concepción de una secuencia lógica de actividades de cariz pedagógico-didáctico y/o de evaluación, que utilizando los contenidos seleccionados, proporcione la satisfacción de las intenciones;
(4) indicación de los recursos humanos y materiales que deben intervenir en las actividades;
(5) elaboración de un conjunto de recomendaciones tendiendo hacia una adecuada ejecución de la secuencia de las actividades.

Téngase en cuenta que, al conjunto de los contenidos ordenados de acuerdo con la secuencia lógica con que van intervenir las actividades, debe de darse la denominación de **programa,** y que se designa **programación,** la afectación de tiempos para la ejecución de cada una de las componentes del programa.

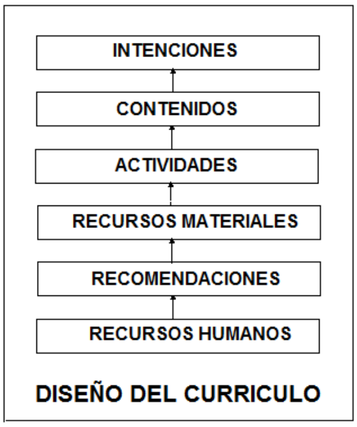


Figura 1.4.1-01: Diseño del Currículo.

El Diseño del Currículo prescribe cómo son los **recursos humanos** a quienes el currículo se destina, teniendo en cuenta las recomendaciones dadas y utilizando los recursos materiales sugeridos, y **deberán ejecutar la secuencia de actividades,** donde serán trabajados los contenidos previamente seleccionados, **teniendo como objetivo alcanzar las metas que fueron definidas**.

Como fuente de motivación para la elaboración de esta sección admítase que, en calidad de profesor de matemática, tenga la necesidad de elaborar un currículo para el grupo del 7º año de escolaridad de la enseñanza básica, con la intención de presentar uno de los más importantes conceptos de la matemática: el de **función**. Admítase, también, porque así se encuadra en el espíritu de esta Tesis, que el grupo incluya un alumno ciego.

El currículo para la grupo será, por lo que ya fue expuesto, de nivel C, mientras el currículo dedicado al alumno ciego será de nivel D, y este currículo debe de estar debidamente encuadrado en el primero. A su vez, dado que el grupo está, naturalmente, insertado en una Escuela, habrá que tener en cuenta el currículo (de nivel B) que la Escuela definió para el 7º año de la enseñanza básica de la asignatura de matemática, el cual, como ya fue realzado, fue diseñado para encuadrarse en el currículo (de nivel A) de responsabilidad del Ministerio de Educación.

1.4.1.1 - Diseño de un currículo de nivel A

En Portugal, la Enseñanza Básica está constituida por nueve años de escolaridad distribuidos en tres ciclos: el 1er. ciclo está constituido por los cuatro primeros años de escolaridad; el 2º ciclo está formado por los 5º y 6º años de escolaridad y el 3er. ciclo contempla los restantes tres años de escolaridad.

Los niños ingresan en el 1er. año de escolaridad a los 6 - 7 años de edad, por lo que, en condiciones normales, frecuentan el 7º año de escolaridad con 12 - 13 años de edad.

El currículo de matemática para el 7º ano de escolaridad está, naturalmente, concebido para articularse con los currículos de matemática de los otros años de la enseñanza básica. De este modo los objetivos para el currículo en cuestión deben de estar agrupadas en:

- Finalidades fundamentales de la Enseñanza de la Matemática;
- Objetivos generales de la Enseñanza de la Matemática;
- Objetivos Generales de la Enseñanza de la Matemática en el 3er. Ciclo de la Enseñanza Básica;
- Metas Curriculares para el 7º año.

Finalidades fundamentales de la enseñanza de la Matemática[36]

1) Promover la adquisición de información, conocimiento y experiencia en Matemática y el desarrollo de la capacidad de su integración y movilización en contextos diversificados. Esta finalidad debe ser entendida incluyendo el desarrollo en los alumnos de la:

1a) comprensión de conceptos, relaciones, métodos y procedimientos matemáticos y de la capacidad de utilizarlos en el análisis, interpretación y resolución de situaciones en contexto matemático y no matemático;

1b) capacidad de analizar información y de resolver y formular problemas, incluyendo los que conllevan procesos de modelación matemática;

1c) capacidad de abstracción y generalización y de comprender y elaborar recursos matemáticas y raciocinios lógicos;

1d) capacidad de comunicar en Matemática, oralmente y por escrito, describiendo, explicando y justificando sus ideas, procedimientos y raciocinios, así como los resultados y conclusiones a que se llega.

2) Desarrollar actitudes positivas frente a la Matemática y capacidad de apreciar esta ciencia. Esta finalidad debe ser entendida incluyendo el desarrollo en los alumnos de:

2a) autoconfianza en sus conocimientos y capacidades matemáticas, y autonomía y desembarazo en su utilización;

2b) sentirse cómodo y tener seguridad frente a situaciones que conlleven Matemática en la vida escolar, corriente, o profesional;

2c) interés por la Matemática y en compartir aspectos de su experiencia en esta ciencia;

2d) comprensión de la Matemática como elemento de la cultura humana, incluyendo aspectos de su historia;

[36] MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2007).

2e) capacidad de reconocer y valorar el papel de la Matemática en los varios sectores de la vida social y en particular en el desarrollo tecnológico y científico;
2f) capacidad de apreciar aspectos estéticos de la Matemática.

Objetivos generales de la enseñanza de la Matemática[37]

1. Los alumnos deben conocer los hechos y procedimientos básicos de la Matemática. Es decir, deben de ser capaces de:
1a) tener presente y usar adecuadamente las convenciones matemáticas, incluyendo la terminología y las notaciones;
1b) efectuar procedimientos y algoritmos de cálculo rutineros;
1c) reconocer las figuras geométricas básicas;
1d) efectuar mediciones y realizar construcciones geométricas con un grado de precisión adecuado;
1e) usar instrumentos matemáticos tales como reglas, escuadras, compases, transportadores, y también calculadoras y computadoras.
2. Los alumnos deben desarrollar una comprensión de la Matemática. Esto es, deben ser capaces de:
2a) entender el significado de los conceptos, relacionándolos con otros conceptos matemáticos y no matemáticos;
2b) percibir la razón de ser de los algoritmos y procedimientos de rutina;
2c) reconocer regularidades y comprender relaciones;
2d) acompañar y analizar un raciocinio o estrategia matemática.
3. Los alumnos deben ser capaces de lidiar con ideas matemáticas en diversas representaciones. Esto es, deben ser capaces de:
3a) leer e interpretar representaciones simbólicas, pictóricas, tablas y gráficos, y presentar adecuadamente información en cualquier de estas formas de representación;
3b) traducir información presentada en una forma de representación a otra, en particular traducir en términos matemáticos la información presentada en lenguaje natural;
3c) elaborar y usar representaciones para registrar, organizar y comunicar ideas matemáticas;
3d) usar representaciones para modelar, interpretar y analizar situaciones matemáticas y no matemáticas, incluyendo fenómenos naturales o sociales.
4. Los alumnos deben ser capaces de comunicar sus ideas e interpretar las

[37] MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2007).

ideas de los otros, organizando y clarificando su pensamiento matemático. Esto es, deben ser capaces de:

4a) interpretar enunciados matemáticos formulados oralmente y por escrito;

4b) usar el lenguaje matemático para expresar las ideas matemáticas con precisión;

4c) describir y explicar, oralmente y por escrito, las estrategias y procedimientos matemáticos que utilizan, y los resultados a los que llegan;

4d) argumentar y discutir las argumentaciones de otros.

5. Los alumnos deben de ser capaces de raciocinar matemáticamente usando los conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos. Esto es, deben ser capaces de:

5a) seleccionar y usar fórmulas y métodos matemáticos para procesar información;

5b) reconocer y presentar generalizaciones matemáticas y ejemplos y contra-ejemplos de una afirmación;

5c) justificar los raciocinios que elaboran y las conclusiones a las que llegan;

5d) comprender lo que constituye una justificación y una demonstración en Matemáticas y usar varios tipos de raciocinio y formas de demonstración;

5e) desarrollar y discutir argumentos matemáticos;

5f) formular e investigar conjecturas matemáticas.

6. Los alumnos deben ser capaces de resolver problemas. Esto es, deben de ser capaces de:

6a) comprender problemas en contextos matemáticos y no matemáticos y de resolverlos utilizando estrategias apropiadas;

6b) apreciar la adecuación de los resultados obtenidos y la adecuación al contexto de las soluciones que llegan;

6c) monitorizar su trabajo y reflejar sobre la adecuación de sus estrategias, reconociendo situaciones en que pueden ser utilizadas estrategias diferentes;

6d) formular problemas.

7. Los alumnos deben de ser capaces de establecer conexiones entre diferentes conceptos y relaciones matemáticas y también entre éstos y situaciones no matemáticas. Esto es, deben de ser capaces de:

7a) identificar y usar conexiones entre ideas matemáticas;

7b) comprender cómo las ideas matemáticas se interrelacionan, constituyendo un todo;

7c) reconocer y aplicar ideas matemáticas en contextos no matemáticos, construyendo modelos matemáticos simples.

8. Los alumnos deben de ser capaces de hacer Matemática de modo autónomo, esto es, deben de ser capaces de:

8a) organizar información por ellos recogida;

8b) identificar por si mismos cuestiones y problemas en contextos variados y de resolverlos autónomamente;

8c) explorar regularidades y formular e investigar conjeturas matemáticas.

9. Los alumnos deben ser capaces de apreciar la Matemática. Esto es, deben ser capaces de:
9a) reconocer la importancia de la Matemática en otras asignaturas escolares y en la vida diaria;
9b) predisponerse a usar ideas y métodos matemáticos en situaciones de su cotidianidad y aplicarlas con éxito;
9c) compartir sus experiencias matemáticas;
9d) reconocer la belleza de las formas, regularidades y estructuras matemáticas;
9e) mostrar conocimiento de la Historia de la Matemática y tener aprecio por su contribución para la cultura y para el desarrollo de la sociedad contemporánea.

Objetivos Generales de la Enseñanza de la matemática en el 3er ciclo de la Enseñanza Básica[38]

1) El 3er. ciclo de la Enseñanza Básica constituye una importante etapa en la formación matemática de los alumnos, siendo simultáneamente un período de consolidación de los conocimientos y capacidades a desarrollar durante la Enseñanza Básica y de preparación para la Enseñanza Secundaria. En particular, es fundamental que empiecen a ser utilizados correctamente los términos (definición, propiedad, teorema, etc.) y los procedimientos demostrativos propios de la Matemática.
2) En los dominios Números y Operaciones y Álgebra,
a) llévese a cabo el estudio de las operaciones sobre el cuerpo ordenado de los números racionales,
b) introdúzcanse las raíces cuadradas y cúbicas,
c) estúdiense ecuaciones del primero y del segundo grado,
d) estúdiense los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas,
e) estúdiense inecuaciones de primero grado,
f) introdúzcanse procedimientos propios de la Álgebra en el cuadro de las propiedades de los monomios y polinomios.
Nota: Todas estas nociones serán posteriormente ampliadas al cuerpo de los números reales.
3) En el dominio de la Geometría y Medida
a) reálcese la necesidad de la introducción de un conjunto más amplio que el de los números racionales, por lo hecho de emerger la constatación de la existencia de segmentos de recta inconmensurables.
b) preséntense algunos teoremas fundamentales, como el teorema de Tales o de Pitágoras, que es visto, en esta iniciativa, como una consecuencia del primero. El teorema de Tales permite también tratar con seguridad los criterios de semejanza de triángulos, que están en la base de numerosas demonstraciones geométricas

[38] BIVAR [et al](2012).

propuestas.

c) Un objetivo general dedicado a la axiomática de la geometría permite encuadrar, históricamente, toda esta progresión y constituye un terreno propicio para el desarrollo del raciocinio hipotético-deductivo de los alumnos.

d) Con el objetivo explícito de abordar convenientemente las isometrías sin puntos fijos, se expone, en el 8º año, un estudio elemental de los vectores.

e) El 9º año está dedicado al estudio de ángulos y circunferencias, partes, rectas y planos en el espacio y volumen de algunos sólidos.

4) En el dominio de las Funciones, Secuencias y Sucesiones

a) se hace una introducción al concepto de función y de sucesión y de algunas de las operaciones entre ellas.

b) son consideradas funciones de proporcionalidad directa, inversa, funciones afines y cuadráticas.

5) En el dominio de la Organización y Tratamiento de Dados,

a) son introducidas algunas medidas de localización y dispersión de un conjunto de dados

b) se hace una iniciación a las probabilidades y a los fenómenos aleatorios.

Las metas curriculares a seguir se evidencian inciden, naturalmente, sobre los **contenidos** que el currículo del 7º año de escolaridad contempla: *números y operaciones*, *álgebra* (donde se proporciona la noción de **función**), *geometría* y *organización* y *tratamiento de datos*. Antes, sin embargo, se destaca el significado de algunos términos que se mencionan en los objetivos específicos, tal como lo explicitan los autores del documento donde tales objetivos están descritos[39]:

Término	**Significado**
«**Identificar**», «**designar**»:	El alumno debe utilizar correctamente la designación referida, sabiendo definir el concepto presentado como se indica o de forma equivalente.
«**Reconocer**»:	Se espera que el alumno consiga presentar una argumentación coherente aunque eventualmente más informal de la explicación facilitada por el profesor. Debe, sin embargo, saber justificar aisladamente los diversos pasos utilizados en esa explicación.
«Reconocer, dado…,»	Se espera que el alumno justifique el enunciado en casos concretos, sin que se exija que lo pruebe con toda la generalidad.
«Extender, «Saber»:	Se espera que el alumno conozca el resultado, pero sin que a él se le exija cualquier justificación o verificación concreta.
«Probar», «Demonstrar»:	Se espera a que el alumno presente una demonstración matemática tan rigurosa como posible

[39] BIVAR [et al] (2012).

«Justificar»: El alumno debe saber justificar de forma simple el enunciado, evocando una propiedad ya conocida.

Metas Curriculares para el 7º año[40]

Relativamente a los números racionales

(las metas r1 a r9 dicen respecto a la multiplicación y división de números racionales relativos)

r1. Probar, a partir de la caracterización algebraica (la suma de los simétricos es nula), que el simétrico de la suma de dos números racionales es igual a la suma de los simétricos, y que el simétrico de la diferencia es igual a la suma del simétrico del aditivo con el sustractivo: $-(q+r) = (-q) + (-r)$ e $-(q-r) = (-q) + (-r)$.

r2. Extender, de los racionales no negativos a todos los racionales, la identificación del producto de un número natural n por un número q como la suma de n parcelas iguales a q y representarlo por $n \times q$ y por $q \times n$, y reconocer que $n \times (-q) = (-q) \times n = -(n \times q)$.

r3. Extender, de los racionales no negativos a todos los racionales, la identificación del cociente entre un número q y un número natural n como el número racional cuyo producto por n es igual a q y representarlo por $q : n$ y por $\frac{q}{n}$ y reconocer que $\frac{(-q)}{n} = -\frac{q}{n}$

r4. Extender de los racionales no negativos a todos los racionales la identificación del producto de un número q por otro $r=\frac{a}{b}$ (donde a y b son números naturales) como el cociente por b del producto de q por a, representarlo por $q \times r$ y $r \times q$ y reconocer que
$(-q) \times r = r \times (-q) = -(r \times q)$.

r5. Extender, de los racionales no negativos a todos los racionales, la identificación del producto de −1 por un número q como el respectivo simétrico y representarlo por $(-1) \times q$ y por $q \times (-1)$.

r6. Identificar, dados dos números racionales positivos q y r, el producto $(-q) \times (-r)$ como $q \times r$, empezando por observar que $(-q) \times (-r) = (q \times (-1)) \times (-r)$.

r7. Saber que el producto de dos cualesquier números racionales es el número racional cuyo valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores, siendo el signo positivo si los factores tuvieren el mismo signo negativo en caso contrario, verificando esta propiedad en ejemplos concretos.

[40] BIVAR [et al] (2012).

r8. Extender de los racionales no negativos a todos los racionales la identificación del cociente entre un número q (el dividendo) y un número no nulo r (el divisor) como el número racional cuyo producto por lo divisor es igual al dividendo y reconocer que $\frac{-q}{r}$ =- $\frac{q}{-r}$=- $\frac{q}{-r}$

r9. Saber que el cociente entre un número racional y un número racional no nulo es el número racional cuyo valor absoluto es igual al cociente de los valores absolutos, siendo el signo positivo si estos números tuvieren el mismo signo y negativo en el caso contrario, verificando esta propiedad en ejemplos concretos.

Relativamente a la geometría

(la meta g1 está en relación al conocimiento de parte del alfabeto griego)

g1. Saber nombrar y representar las letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi, \rho, \sigma$

(los objetivos g2 a g26 se relacionan con la clasificación y construcción de cuadriláteros)

g2. Identificar una «línea poligonal» como una secuencia de segmentos de recta en un dado plano, designados por «lados», tal que pares de lados consecutivos reparten un extremo, lados que se intersectan no son colineales y no hay más de que dos lados repartiendo un extremo, designar por «vértices» los extremos comunes a dos lados y utilizar correctamente el término «extremidades de la línea poligonal».

g3. Identificar una línea poligonal como «cerrada» cuando las extremidades coinciden.

g4. Identificar una línea poligonal como «simples» cuando los únicos puntos comunes a dos lados son vértices.

g5. Reconocer informalmente que una línea poligonal cerrada simple delimita en el plano dos regiones disjuntas, siendo una de ellas limitada y designada por «parte interna», y la otra ilimitada y designada por «parte externa» de la línea.

g6. Identificar un «polígono simple», o solamente «polígono», como la unión de los lados de una línea poligonal cerrada simple con la respectiva parte interna, designar por «vértices» y «lados» del polígono respectivamente los vértices y los lados de la línea poligonal, por «interior» del polígono la parte interna de la línea poligonal, por «exterior» del polígono la parte externa de la línea poligonal y por «frontera» del polígono la unión de los respectivos lados, y utilizar correctamente los términos «vértices consecutivos» y «lados consecutivos».

g7. Designar por [A_1 A_2 ... A_n] el polígono de lados [A_1 A_2], [A_2 A_3],…,[A_n A_1].

g8. Identificar un «cuadrilátero simple» como un polígono simple con cuatro lados, designándolo también por «cuadrilátero» cuando esta simplificación de lenguaje no fuere ambigua, y utilizar correctamente, en este contexto, el término «lados opuestos».

g9. Identificar un «ángulo interno» de un polígono como un ángulo de vértice coincidente con un vértice del polígono, de lados que contienen los lados del polígono que se encuentran en ese vértice y que intersecta el interior del polígono, y utilizar correctamente, en este contexto, los términos «ángulos adyacentes» a un lado.

g10. Designar un polígono por «convexo» cuando cualquier segmento de recta que une dos puntos del polígono está contenido en él y por «cóncavo» en el caso contrario.
g11. Saber que un polígono es convexo cuando (y solamente cuando) los ángulos internos son todos convexos y que, en este caso, el polígono es igual a la intersección de los respectivos ángulos internos.

g12 Identificar un «ángulo externo» de un polígono convexo como un ángulo suplementario y adyacente a un ángulo interno del polígono.

g13. Demostrar que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a un ángulo de un giro.

g14. Reconocer, dado un polígono, que la suma de las medidas de las amplitudes, en grados, de los respectivos ángulos internos es igual al producto de 180 por el número de lados, disminuido en dos unidades y que asociando a cada ángulo interno un externo adyacente, la suma de estos es igual a un ángulo de un giro.

g15. Designar por «diagonal» de un dado polígono cualquier segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

g16. Reconocer que un cuadrilátero tiene exactamente dos diagonales y saber que las diagonales de un cuadrilátero convexo se intersectan en un punto que es interior al cuadrilátero.

g17. Reconocer que un cuadrilátero es un paralelogramo cuando (y solamente cuando) las diagonales se bisecan.

g18. Reconocer que un paralelogramo es un rectángulo cuando (y solamente cuando) las diagonales son iguales.

g19. Reconocer que un paralelogramo (losange) lo es de lados iguales y ángulos iguales cuando (y solamente cuando) las diagonales son perpendiculares.

g20. Identificar un «cometa» como un cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos iguales y reconocer que un losange es un cometa.

g21. Reconocer que las diagonales de un cometa son perpendiculares.

g22. Identificar «trapecio» como un cuadrilátero simple con dos lados paralelos (designados por «bases» y justificar que un paralelogramo es un trapecio.

g23. Designar un trapecio con dos lados opuestos no paralelos por «trapecio isósceles» cuando eses lados son iguales y por «trapecio escaleno» en el caso contrario.

g24. Designar un trapecio por «trapecio rectángulo» cuando tiene un lado perpendicular a las bases.

g25. Demostrar que todo el trapecio con bases iguales es un paralelogramo.

g26. Resolver problemas incluyendo congruencias de triángulos y propiedades de los cuadriláteros, pudiendo incluir demonstraciones geométricas.

(las metas g27 a g40 se relacionan con la identificación y construcción de figuras congruentes y semejantes)

g27. Identificar dos figuras geométricas como «isométricas» o «congruentes» cuando es posible establecer entre los respectivos puntos una correspondencia uno a uno de tal modo que, pares de puntos correspondientes, son equidistantes y designar una correspondencia con esta propiedad por «isometría».

g28. Identificar dos figuras geométricas como «semejantes» cuando es posible establecer entre los respectivos puntos una correspondencia uno a uno de tal modo que las distancias entre pares de puntos correspondientes sean directamente proporcionales, designar la respectiva constante de proporcionalidad por «razón de semejanza», una correspondencia con esta propiedad por «semejanza» y justificar que las isometrías son las semejanzas de razón 1.

g29. Saber que toda la figura semejante a un polígono es un polígono con lo mismo número de vértices y que toda la semejanza asociada hace corresponder a los vértices y a los lados de uno respectivamente con los vértices y los lados del otro.

g30. Saber que dos polígonos convexos son semejantes cuando (y solamente cuando) se puede establecer una correspondencia entre los vértices de uno y del otro, de tal modo que las longitudes de los lados y de las diagonales del segundo, se obtienen multiplicando las longitudes de los correspondientes lados y de las diagonales del primero por un mismo número.

g31. Descomponer un triángulo dado en dos triángulos y un paralelogramo, trazando las dos rectas que pasan por el punto medio de uno de los lados y son respectivamente paralelas a cada uno de los otros dos y justificar que los dos triángulos de la descomposición son iguales, y concluir que todos los lados del triángulo inicial quedan así bisecados.

g32. Reconocer, dado un triángulo [ABC], que si una recta r intersectar el segmento [AB] en el punto medio M y el segmento [AC] en el punto D, que $\overline{AD} = \overline{DC}$ cuando (y solamente cuando) r es paralela a BC y que, en ese caso, $\overline{BC}$=2 $\overline{MD}$.

g33. Enunciar el Teorema de Tales y demostrar las condiciones de proporcionalidad en él envueltas por argumentos geométricos, en ejemplos con constantes de proporcionalidad racionales.

g34. Reconocer que dos triángulos son semejantes cuando las longitudes de los lados de uno son directamente proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes del otro y designar esta propiedad por «criterio LLL de semejanza de triángulos»

g35. Reconocer, utilizando el teorema de Tales, que dos triángulos son semejantes cuando las longitudes de dos lados de uno son directamente proporcionales a las longitudes de dos de los lados del otro y los ángulos por ellos formados en cada triángulo son iguales y designar esta propiedad por «criterio LAL de semejanza de triángulos».

g36. Reconocer, utilizando el teorema de Tales, que dos triángulos son semejantes cuando dos ángulos internos de uno son iguales a dos de los ángulos internos del otro, y designar esta propiedad por «criterio AA de semejanza de triángulos».

g37. Reconocer, utilizando el teorema de Tales, que dos triángulos semejantes tienen los ángulos correspondientes iguales.

g38. Reconocer que dos cualesquier círculos son semejantes, con razón de semejanza igual al cociente de los respectivos radios.

g39. Saber que dos polígonos son semejantes cuando (y solamente cuando) tienen el mismo número de lados y existe una correspondencia entre ellos tal, que las longitudes de los lados del segundo son directamente proporcionales a las longitudes de los lados del primero, y los ángulos formados por lados correspondientes son iguales, y reconocer esta propiedad en casos concretos por triangulaciones.

g40. Dividir, dado un número natural n, un segmento de recta en n segmentos de igual longitud utilizando regla y compás.

(las metas g41 a g46 dicen respecto a la construcción y reconocimiento de propiedades de homotecias)

g41. Identificar, dado un punto O y un número racional positivo r , la «homotecia de centro O y razón r» con la correspondencia que a un punto M "asocia el punto " M´ de la semirrecta $\dot{O}M$ tal que $\overline{OM'}$=- r $\overline{\dot{O}M}$

g42. Identificar, dado un punto O y un número racional negativo r, la «homotecia de centro O y razón r » como la correspondencia que a un punto M " asocia el punto " M´ de la semirrecta opuesta a $\dot{O}$M " tal que $\overline{OM'}$=r $\dot{O}$M.

g43. Utilizar correctamente los términos «homotecia directa», «homotecia inversa», «ampliación», «reducción» y «figuras homotéticas».

g44. Reconocer que dos figuras homotéticas son semejantes, siendo la razón de semejanza el módulo de la razón de la homotecia.

g45. Construir figuras homotéticas utilizando cuadrículas o utilizando regla y compás.

g46. Resolver problemas incluyendo semejanzas de triángulos y homotecias, pudiendo incluir demonstraciones geométricas.

(las metas g47 a g52 se relacionan con la medición de segmentos de recta con diferentes unidades)

g47. Reconocer, fijada una unidad de medida de longitud, un segmento de recta [AB] de medida m y un segmento de recta [CD] de medida m , que la medida de [CD] tomando la longitud de [AB] para unidad de medida es igual a $\frac{m'}{m}$

g48. Reconocer que el cociente entre las medidas de longitud de dos segmentos de recta se mantiene cuando se altera la unidad de medida considerada.

g49. Designar dos segmentos de recta por «conmensurables» cuando existe una unidad de medida de longitud, tal que la medida de ambos es expresa por números enteros.

g50. Reconocer que si existe una unidad de medida tal que la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo isósceles tienen medidas naturales respectivamente iguales a **a** y a **b** entonces, $a^2 = 2b^2$ y que, descomponiendo el triángulo en dos triángulos a él semejantes, por la altura relativa a la hipotenusa y utilizando, también, el Teorema fundamental de la aritmética, se llega a una contradicción que consiste al se mostrar que a y b no pueden ser, simultáneamente, números naturales.

g51. Justificar que la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo isósceles no son conmensurables y designar segmentos de recta con esta propiedad por «inconmensurables».
g52. Reconocer que dos segmentos de recta son conmensurables cuando (y solamente cuando), tomando un de ellos por unidad de longitud, existe un número racional positivo r tal que la medida del otro es igual a r.

(las metas g53 a g55 dicen respecto al cálculo de áreas de cuadriláteros)

g53. Probar, fijada una unidad de longitud, que el área de un cometa (es, en particular, de un losange), con diagonales de longitud D y d unidades, es igual a $\frac{D\times d}{2}$ unidades cuadradas.

g54. Identificar la «altura» de un trapecio como la distancia entre las bases.

g55. Reconocer, fijada una unidad de longitud, que el área de un trapecio de bases de longitud B y b unidades y altura la unidades es igual a $\frac{B\times b,}{2}$×a unidades cuadradas.

(las metas g56 a g59 se relacionan con perímetros y áreas de figuras semejantes)

g56. Probar, dados dos polígonos semejantes o dos círculos, que el perímetro del segundo es igual al perímetro del primero multiplicado por la razón de semejanza que transforma el primero en el segundo.

g57 Probar que dos cuadrados son semejantes y que la medida del área del segundo es igual a la medida del área del primero multiplicada por el cuadrado de la razón de semejanza que transforma el primero en el segundo.

g58. Saber, dadas dos figuras planas semejantes, que la medida del área de la segunda es igual a la medida del área de la primera multiplicada por el cuadrado de la razón de semejanza que transforma la primera en la segunda.

g59. Resolver problemas que incluyan el cálculo de perímetros y áreas de figuras semejantes.

Relativamente a las Funciones

(las metas f1 a f10 se relacionan con la definición de función)

f1. Saber, dados conjuntos A y B, que queda definida una «función f (o aplicación) de A en B, cuando a cada elemento x de A se asocia un elemento único representado por f(x) y utilizar correctamente los términos «objeto», «imagen», «dominio», «conjunto de llegada» y «variable».

f2. Designar una función f de A en B por «f :A →B "» o por «f» cuando esta notación simplificada no es ambigua.

f3. Saber que dos funciones f y g son iguales (f = g) cuando (y solamente cuando) tienen el mismo dominio y el mismo conjunto de llegada y cada elemento del dominio tiene la misma imagen por f y g.

f4. Designar, dada una función f : A → B, por «contradominio de f el conjunto de las imágenes por f de los elementos de A y representarlo por f(A).

f5. Representar por «(a, b)» el «par ordenado» de «primer elemento» a y «segundo elemento» b.

f6. Saber que pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales cuando (y solamente cuando) a=c y b=d.

f7. Identificar el gráfico de una función f: A →B" como el conjunto de los pares ordenados (a, b) con a ∈ A y b = f (x) y designar en esto contexto a por «variable independiente» y b por «variable dependiente».

f8. Designar una dada función f : A →B por «función numérica» (respectivamente «función de variable numérica») cuando B (respectivamente A) es un conjunto de números.

f9. Identificar, fijado un referencial cartesiano en un plano, el «gráfico de puntos» de una función numérica f de variable numérica como el conjunto G constituido por los puntos, del plano cuya ordenada es la imagen por f de la abscisa y designar el gráfico de puntos por «gráfico de f » cuando esta identificación no es ambigua y la expresión «y = f (x)» por «ecuación de G».

f10. Identificar y representar funciones con dominios y conjuntos de llegada finitos, en diagramas de vectores, tablas y gráficos de puntos y en contextos variados.

(las metas f11 a f18 se refieren a operaciones que incluyen funciones)

f11. Identificar la suma de funciones numéricas con un dominio dado A y conjunto de llegada $\mathbb{Q}$ como la función de mismo dominio y conjunto de llegada, tal que la imagen de cada $x \in A$ es la suma de las imágenes y proceder, de forma análoga, para disminuir, multiplicar y elevar funciones a un exponente natural.

f12. Efectuar operaciones con funciones de dominio finito definidas por tablas, diagramas de vectores o gráficos de puntos.

f13. Designar, dado un número racional b, por «función constante igual a b» la función $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = b$ para cada $x \in \mathbb{Q}$ y designar las funciones con esta propiedad por «funciones constantes» o solamente «constantes» cuando esta designación no es ambigua.

f14. Designar por «función lineal» una función $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ para la cual existe un número racional tal que $f(x) = ax$, para todo el $x \in \mathbb{Q}$, designando esta expresión por «forma canónica» de la función lineal y a por «coeficiente de f».

f15. Identificar una función afine como la suma de una función lineal con una constante y designar por «forma canónica» de la función afine la expresión «ax+b», donde a es el coeficiente de la función lineal e b el valor de la constante, y designar a por «coeficiente de x» y b por «término independiente».

f16. Probar que el producto por constante, la suma y la diferencia de funciones lineales son funciones lineales de coeficientes respectivamente iguales al producto por la constante, a la suma y a la diferencia de los coeficientes de las funciones dadas.

f17. Demostrar que el producto por constante, la suma y la diferencia de funciones afines son funciones afines de coeficientes de la variable y términos independientes respectivamente iguales al producto por la constante, a la suma e a la diferencia de los coeficientes y de los términos independientes de las funciones dadas.

f18. Identificar funciones lineales y afines reduciendo las expresiones dadas para esas funciones a la forma canónica.

(las metas f19 a f21 se refieren a la definición de funciones de proporcionalidad directa)

f19. Reconocer, dada un tamaño directamente proporcional a otro, que, fijadas unidades, la «función de proporcionalidad directa f» que asocia a la medida m de la segunda a correspondiente medida y = f(m) de la primera satisface, para todo el número positivo x, f(x m) = x f(m) (al multiplicar la medida m de la segunda por un dado número positivo, la medida y = f(m) de la primera queda también multiplicada por ese número) y, considerando m = 1, que f es una función lineal de coeficiente a = f(1).

f20. Reconocer, dada un tamaño directamente proporcional a otro, que la constante de proporcionalidad es igual al coeficiente de la respectiva función de proporcionalidad directa.

f21. Resolver problemas que incluyan funciones de proporcionalidad directa en diversos contextos.

(las metas f22 a f25 se relacionan con la definición de secuencias y de sucesiones)

f22. Identificar, dado un número natural N, una «secuencia de N elementos» como una función de dominio {1,2,…,N} y utilizar correctamente la expresión «término de orden p de la secuencia» y «término general de la secuencia».

f23. Identificar una «sucesión» como una función de dominio $\mathbb{N}$, designando por u_n la imagen del número natural n por u y utilizar correctamente la expresión «término de orden n de la sucesión» y «término general de la sucesión».

f24. Representar, en un plano provisto de un referencial cartesiano, gráficos de secuencias.
a25. Resolver problemas que incluyen secuencias y sucesiones y los respectivos términos generales.

En lo relativo al Algebra

(de a1 a a7: Extender la potenciación y conocer las propiedades de las operaciones)

a1. Extender de los racionales no negativos a todos los racionales, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y de la multiplicación, y las propiedades distributivas de la multiplicación relativamente a la adición y a la sustracción.

a2. Extender de los racionales no negativos a todos los racionales, la identificación del 0 y del 1 como los elementos neutros respectivamente de la adición y de la multiplicación de números, del 0 como elemento absorbente de la multiplicación y de dos números como «inversos» uno del otro cuando el respectivo producto es igual a 1.

a3. Extender de los racionales no negativos a todos los racionales el reconocimiento de que el inverso de un número dado no nulo q es igual a $\frac{1}{q}$, el inverso del producto es igual al producto de los inversos, el inverso del cociente es igual al cociente de los inversos y de que, números dados q, r, s y t, $\frac{q}{r}\times\frac{s}{t}=\frac{q\times s}{r\times t}$ y $\frac{q}{r}:\frac{s}{t}=\frac{q\times t}{r\times s}$ (r, s, t no nulos).

a4. Extender de los racionales no negativos a todos los racionales la definición y las propiedades previamente estudiadas de las potencias de exponente natural de un número.

a5. Reconocer, dado un número racional q y un número natural n , que $(-q)^n = q^n$ se q es par y $(-q)^n = - q^n$ si q es impar.

a6. Reconocer, dado un número racional no nulo q y un número natural n, que la potencia q^n es positiva cuando n es par y tiene la señal de q cuando n es impar.

a7. Simplificar y calcular el valor de expresiones numéricas, incluidas las cuatro operaciones aritméticas y la potenciación.

(de a8 a a18: Operar con raíces cuadradas y cúbicas racionales)

a8. Saber, dados dos números racionales positivos q y r con q < r, que $q^2 < r^2$, verificando esta propiedad en ejemplos concretos, considerando dos cuadrados de lados con medida de longitud respectivamente iguales a q y r en determinada unidad, el segundo obtenido del primero por prolongación de los respectivos lados.

a9. Saber, dados dos números racionales positivos q y r con q < r , que $q^3 < r^3$, verificando esta propiedad en ejemplos concretos, considerando dos cubos de aristas con medida de longitud respectivamente iguales q y r en determinada unidad, el segundo obtenido del primero por prolongación de las respectivas aristas.

a10. Designar por «cuadrados perfectos» (respectivamente «cubos perfectos») los cuadrados (respectivamente cubos) de los números enteros no negativos y construir tablas de cuadrados y cubos perfectos.

a11. Reconocer, dado un cuadrado perfecto no nulo o, más generalmente, un número racional q igual al cociente de dos cuadrados perfectos no nulos, que existen exactamente dos números racionales, simétricos uno del otro, cuyo cuadrado es igual a q, designar lo que es positivo por «raíz cuadrada de q» y representarlo por $\sqrt{q}$.

a12. Reconocer que 0 es el único número racional cuyo cuadrado es igual a 0, designarlo por «raíz cuadrada de 0» e representarlo por $\sqrt{0}$.

a13. Probar, utilizando la definición de raíz cuadrada, que para cualesquier q y r respectivamente iguales a cocientes de cuadrados perfectos, que también lo son q × r y (para r ≠ 0) $\frac{q}{r}$ y, se tiene también que $\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}$ y, (para r≠0), $\sqrt{\frac{q}{r}}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$

a14. Probar, utilizando la definición de raíz cuadrada, que para cualesquier q y r respectivamente iguales a cocientes de cuadrados perfectos, que también lo son q × r y (para r ≠ 0) $\frac{q}{r}$ y, se tiene aún que $\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}$ y, (para r≠0), $\sqrt{\frac{q}{r}}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$

a15. Reconocer, dado un cubo perfecto o, más generalmente, un número racional q igual al cociente de dos cubos perfectos o al respectivo simétrico, que existe un único número racional cuyo cubo es igual a q, designarlo por «raíz cúbica de q» y representarlo por $\sqrt[3]{q}$.

a16. Probar, utilizando la definición de raíz cúbica, que para cualesquier q y r respectivamente iguales a cocientes o a simétricos de cocientes de cubos perfectos no nulos, que también lo son p × r y (para r ≠ 0) $\frac{q}{r}$, que $\sqrt[3]{-q}. = -\sqrt[3]{q}.$, $\sqrt[3]{q \times r}.= \sqrt[3]{q}. \times \sqrt[3]{r}.$ y (para " ≠ 0) $\sqrt[3]{\frac{q}{r}}.= \frac{\sqrt[3]{q}.}{\sqrt[3]{r}.}$.

a17. Determinar, en la forma fraccionaria o como representaciones decimales, raíces cuadradas (respectivamente cúbicas) de números racionales que puedan ser representados como cocientes de cuadrados perfectos (respectivamente cocientes o simétrico de cocientes de cubos perfectos) por observación de tablas de cuadrados (respectivamente cubos) perfectos.

a18. Reconocer, dado un número racional con representación decimal y tal que descolocando la coma dos (respectivamente tres) espacios decimales para la derecha obtenemos un cuadrado (respectivamente cubo) perfecto, que es posible representarlo como fracción decimal, cuyos términos son cuadrados (respectivamente cubos) perfectos y determinar la representación decimal de la respectiva raíz cuadrada (respectivamente cúbica).

a19. Determinar las representaciones decimales de raíces cuadradas (respectivamente cúbicas) de números racionales representados en la forma de decimales, obtenidas por desplazamiento de la coma hacia la izquierda, un número par de posiciones decimales (respectivamente un número de posiciones decimales que se múltiplo de tres) en representaciones decimales de números retirados de la columna de resultados de tablas de cuadrados (respectivamente cubos) perfectos.

(de a20 a a28: resolver ecuaciones del 1.º grado)

a20. Identificar, dadas dos funciones f y g , una «ecuación» con una «incógnita x» como una expresión de la forma «f(x)=g(x)», designar, en este contexto, «f(x)» por «primer miembro de la ecuación», «g x!)» por «segundo miembro de la ecuación», cualquier a tal que f(a)=g(a) por «solución» de la ecuación y el conjunto de las soluciones por «conjunto-solución».

a21. Designar una ecuación por «imposible» cuando el conjunto-solución es vacío y por «posible» en el caso contrario.

a22. Identificar dos ecuaciones como «equivalentes» cuando tuvieren el mismo conjunto-solución y utilizar correctamente el símbolo «⇔».

a23. Identificar una ecuación «f(x)=g(x))» como «numérica» cuando(x) y g(x) son funciones numéricas, reconocer que se obtiene una ecuación equivalente adicionando o sustraendo un mismo número a ambos de los miembros, o multiplicando o dividiendo por un mismo número no nulo ambos miembros, y designar estas propiedades por «principios de equivalencia».

a24. Designar por «ecuación lineal con una incógnita» o simplemente «ecuación lineal» cualquier ecuación «f(x)=g(x)» tal que f(x) e g(x) son funciones afines.

a25. Simplificar ambos miembros de la ecuación y aplicar los principios de equivalencia para mostrar que una ecuación lineal dada es equivalente a una ecuación en la que el primer miembro es dado por una función lineal y el segundo miembro es constante (a x = b).

a26. Probar, dados números racionales a y b, que la ecuación a x = b es imposible se a = 0 e b≠0, que cualquier número es solución se a=b=0 (ecuación lineal posible indeterminada), que se a≠ 0 la única solución es el número racional $\frac{b}{a}$ (ecuación lineal posible determinada) y designar una ecuación lineal determinada por «ecuación algébrica de 1er. grado».

a27. Resolver ecuaciones lineales distinguiendo las que son imposibles de las que son posibles y entre estas las que son determinadas o indeterminadas, y presentar la solución de una ecuación algébrica de 1er. grado en la forma de fracción irreducible o numeral mixto o en la forma de representación decimal con una aproximación solicitada.

a28. Resolver problemas con ecuaciones lineales.

Respecto a la Organización y Tratamiento de Datos.

(Representar, tratar y analizar conjuntos de datos: metas t1 a t12)

t1. Construir, considerado un conjunto de dados numéricos, una secuencia creciente en sentido lato cuyos valores sean los valores de las categorías, repetidos un número de veces igual a la respectiva frecuencia absoluta, designándola por «secuencia ordenada de datos».

t2. Identificar, dado un conjunto de n datos numéricos, la «mediana» como el valor central en el caso de n ser impar (valor del elemento de orden $\frac{n+1}{2}$ de la secuencia ordenada de los dados), o como la media aritmética de los dos valores centrales (valores de los elementos de órdenes $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}$+1 secuencia ordenada de los datos) en el caso de n ser par y representar la mediana por «$\tilde{x}$» o «Me».

t3. Determinar la mediana de un conjunto de datos numéricos.

t4. Identificar, dado un conjunto de n datos numéricos (siendo n impar), el «primer cuartil» (respectivamente «tercer cuartil») como la mediana del subconjunto de datos de orden inferior (respectivamente superior) a $\frac{n+1}{2}$ en la secuencia ordenada del conjunto inicial de datos.

t5. Identificar, dado un conjunto de n datos numéricos (siendo n par), el «primer cuartil» (respectivamente «tercer cuartil») como la mediana del subconjunto de datos de orden inferior o igual $\frac{n}{2}$ (respectivamente superior o igual a $\frac{n}{2}$+1) en la secuencia ordenada del conjunto inicial de datos.

t6. Identificar, dado un conjunto de datos numéricos, el «segundo cuartil» como la mediana de ese conjunto y representar los primer, segundo y tercer cuartiles respectivamente por Q_1, Q_2 y Q_3.

t7. Reconocer, dado un conjunto de datos numéricos, que por lo menos un cuarto de los datos tienen valores no superiores al primer cuartil y que por lo menos tres cuartos de los datos tienen valores no superiores al tercer cuartil.

t8. Representar conjuntos de datos cuantitativos en diagramas de extremos y cuartiles.

t9. Designar por «medidas de localización» la media, la moda, la mediana y los cuartiles de un conjunto de datos.

t10. Designar un conjunto de datos como «simétrico» cuando la media, la moda y la mediana son iguales.

t11. Identificar la «amplitud intercuartil» como la diferencia entre el 3.º cuartil y el 1.º cuartil ($Q_3 – Q_1$) y designar por «medidas de dispersión» la amplitud y la amplitud intercuartil.

t12. Resolver problemas que incluyan el análisis de datos representados en tablas.

El cuadro siguiente evidencia, de forma sintética, los contenidos y, para cada uno de ellos, las referencias a las respectivas metas curriculares como más arriba se presentaron.

Contenidos	**Tópicos**	**Metas Curriculares**
Números racionales	multiplicación y división de números racionales relativos.	r1 a r9
Geometría y medida	conocimiento de parte del alfabeto griego	g1
	clasificación y construcción de cuadriláteros	g2 a g26
	identificación y construcción de figuras congruentes y semejantes	g27 a g40
	construcción y reconocimiento de propiedades de homotecias	g41 a g46
	medición de segmentos de recta con diferentes unidades)	g47 a g52
	perímetros y áreas de cuadriláteros	g53 a g55
	relacionamiento de perímetros y áreas de figuras semejantes	g56 a g59
Funciones	definición de función	f1 a f10
	operar con funciones	f11 a f18
	funciones de proporcionalidad directa	f19 a f21
	definición de secuencias y de sucesiones	f22 a f25
Álgebra	expresiones algébricas: extender la potenciación y conocer las propiedades de las operaciones	a1 a a7
	raíces cuadradas y cúbicas racionales	a8 a a19
	resolver ecuaciones del 1.º grado	a20 a a28
Organización y tratamiento de datos	representación, tratamiento y análisis de un conjunto de dados	t1 a t12

Para ejecución de este currículo de nivel A los recursos humanos y materiales a intervenir serán puestos a disposición, naturalmente, por los centros educativos existentes en el país, y con el objetivo de impartir el 7º año de escolaridad de la enseñanza básica.

En el que respecta a recomendaciones, una de las más importantes, es atender cual es el calendario escolar en el ámbito del cual el currículo será desarrollado. En este contexto, para el año lectivo de 2012-2013, el calendario escolar fue determinado por lo despacho (decreto) nº 8771- A publicado en el Diario de la República, el día 2 de Julio de 2012. En él consta (traduciéndolo al castellano) lo siguiente:

"… 2 — Enseñanzas básica y secundaria:
2.1 — El calendario escolar para las enseñanzas básica y secundaria, incluyendo la enseñanza especial, en el año lectivo de 2012 -2013, es lo constante en el anexo I al presente despacho, del que forma parte integrante.
2.2 — Las interrupciones de las actividades lectivas, en el año lectivo de 2012 -2013, son las constantes del anexo II del presente despacho, del cual forma parte integrante.
2.3 — No podrá haber cualquier interrupción de las actividades lectivas además de las previstas en el número anterior.
2.4 — Sin prejuicio del dispuesto en el número anterior, las escuelas pueden, durante uno o dos días, sustituir las actividades lectivas por otras actividades escolares de carácter formativo que impliquen sus alumnos.
2.5 — Las reuniones de evaluación sumativa interna son realizadas, obligatoriamente:
a) Durante los períodos de interrupción de las actividades lectivas, en el caso de la evaluación a efectuar al final de los 1.º y 2.º períodos lectivos;
b) Después del fin de las actividades lectivas, en el caso de la evaluación a efectuar al final del 3er. período lectivo."

…*ANEXO I*

Período lectivo	*Inicio*	*Fin*
1º	*Entre 10 e 14 de Septiembre de 2012*	*14 de Diciembre de 2012*
2º	*3 de Enero de 2013*	*15 de Marzo de 2013*
3º	*2 de Abril de 2013*	*14 de Junio de 2013*

…

ANEXO II

Interrupciones lectivas	*Inicio*	*Fin*
1º	*17 de Diciembre de 2012*	*2 de Enero de 2013*
2º	*11 de Febrero de 2013*	*13 de Febrero de 2013*
3º	*18 de Marzo de 2013*	*1 de Abril de 2013*

…"

1.4.1.2 – Diseño de un currículo de nivel B

El diseño de un currículo de nivel B está elaborado, tal como ya fue referido, en el ámbito de un centro educativo y teniendo por referencia lo que consta del correspondiente currículo de nivel A. Así, considerando la hipótesis formulada en el inicio de esta sección, admítase que yo, en calidad de profesor de matemáticas, formo parte del cuerpo docente de un determinado centro educativo que, en este contexto, soy el responsable por elaborar una propuesta de diseño de un currículo de nivel B para la asignatura de matemáticas que se impartirá el 7º año de escolaridad. En esa propuesta hago las siguientes tres sugerencias:

Sugerencia 1: El programa además de contemplar lo que consta del currículo de nivel A, deberá iniciarse por la presentación de un pequeño tema relativo a “Cuestiones de Lenguaje”. Este tema contemplará los conceptos de “expresión”; “expresión con significado”, “expresión sin significado”, ”expresión sin variables”; “designación”, “designación versus designado”, “designaciones equivalentes”, “proposición”, “proposición verdadera”, “proposición falsa”, “expresión con variables”, “dominio de una expresión”, “expresión designatória”, “expresión proposicional” o “condición” y “solución de una condición”. Posteriormente, en el decurso de la ejecución del programa, estos conceptos deberían ser sistemáticamente tenidos en cuenta.

Sugerencia 2: Presentar las nociones: “correspondencia entre dos conjuntos”, “correspondencia unívoca” y “correspondencia no unívoca”. Una vez interiorizado el concepto de correspondencia unívoca, referir que la “correspondencia unívoca” también se designa por “función”, “aplicación”, o “transformación” siendo esta última expresión la más utilizada en contextos geométricos. Evidenciar que en una función hay tres componentes fundamentales a tener en cuenta: el conjunto de partida, el conjunto de llegada y el mecanismo o proceso que, de forma clara, asocia a cada elemento del conjunto de partida un y un sólo un elemento del conjunto de llegada. En el ámbito de la geometría señalar, también, que las homotecias son casos particulares de funciones y evidenciar las tres componentes fundamentales que las caracterizan.

Sugerencia 3: La planificación anual tendría aspecto que consta en la tabla que se sigue.

Contenidos	Tópicos	Metas Curriculares	Período
Cuestiones de lenguaje	identificar si una expresión tiene o no significado	q1	**1º** 14 de Septiembre a 14 de Diciembre: (13 semanas)
	identificar una designación	q2	
	distinguir entre designación y designado	q3	
	verificar si dos designaciones son o no equivalentes	q4	
	identificar una proposición	q5	
	clasificar una proposición en verdadera o falsa	q6	
	identificar una expresión designatoria	q7	
	Identificar una expresión proposicional o condición	q8	
	Identificar si un determinado valor es o no solución de una condición	q9	
Números racionales	multiplicación y división de números racionales relativos	r1 a r9	
Álgebra	definición de función	a1 a a10	
	operar con funciones	a11 a a18	
	funciones de proporcionalidad directa	a19 a a21	
	definición de secuencias y de sucesiones	a22 a a25	
	expresiones algébricas: extender la potenciación y conocer las propiedades de las operaciones	a26 a a32	
	raíces cuadradas y cúbicas racionales	a33 a a44	
	resolver ecuaciones del 1er. grado	a45 a a53	

<table>
<tr><th>Contenidos</th><th>Tópicos</th><th>Metas Curriculares</th><th>Período</th></tr>
<tr><td>Organización y tratamiento de datos</td><td>Representación, tratamiento y análisis de un conjunto de datos</td><td>t1 a t12</td><td rowspan="3">2º
3 de Enero
a 15 Marzo
(11 semanas)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Geometría e medida</td><td>conocimiento de parte del alfabeto griego</td><td>g1</td></tr>
<tr><td>clasificación y construcción de cuadriláteros</td><td>g2 a g26</td></tr>
<tr><td>identificación y construcción de figuras congruentes y semejantes</td><td>g27 a g40</td><td rowspan="6">3º
2 de Abril a 14 de Juno
(11 semanas)</td></tr>
<tr><td>construcción y reconocimiento de propiedades de homotecias</td><td>g41 a g46</td></tr>
<tr><td>medición de segmentos de recta con diferentes unidades</td><td>g47 a g52</td></tr>
<tr><td>perímetros y áreas de cuadriláteros</td><td>g53 a g55</td></tr>
<tr><td>Relación de perímetros y áreas de figuras semejantes</td><td>g56 a g59</td></tr>
</table>

1.4.1.3 - Diseño de un currículo de nivel C

El contenido que debe de ser proporcionado en este currículo es el concepto de función debiendo cada alumno del grupo alcanzar los objetivos específicos siguientes:

- reconocer si una correspondencia dada entre dos conjuntos es o no unívoca;
- saber que las correspondencias unívocas también se designan por funciones, aplicaciones o transformaciones;
- saber que en las funciones hay 3 elementos fundamentales a considerar: el conjunto de partida, el conjunto de llegada y el proceso o mecanismo que asocia a cada elemento del conjunto de partida un solo elemento del conjunto de llegada;
- identificar el dominio de una función;
- identificar el contradominio de una función;

- identificar los diversos modos de representación de una función
- reconocer si una función es o no inyectiva;
- reconocer si una función es o no sobreyectiva;
- reconocer si una función es o no biyectiva;
- saber si dos funciones son o no iguales.

Como recursos materiales serán utilizados el cuadro, los manuales escolares, los cuadernos y el material para escribir.

1.4.1.4 – Diseño de un currículo de nivel D

Las **intenciones**, los **contenidos** y las **actividades** son precisamente los mismos que fueron referidos en el currículo de nivel C. En lo que respecta a los **recursos materiales** se utilizará

- una placa de corcho,

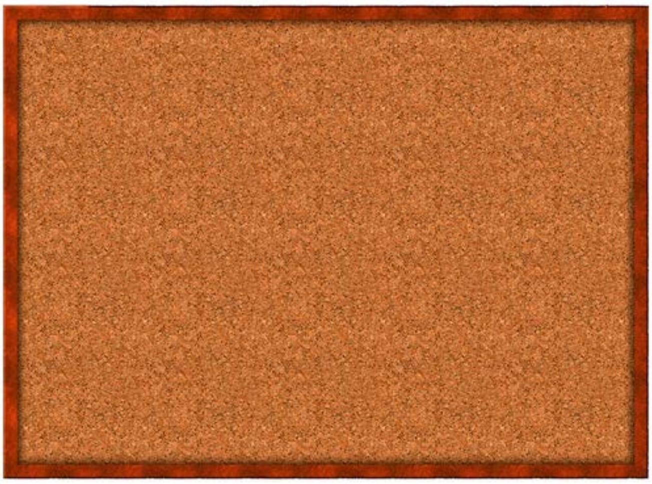


Figura 1.4.1.4-01: Placa de corcho 500 × 365 mm^2.

- dos círculos, también en corcho,

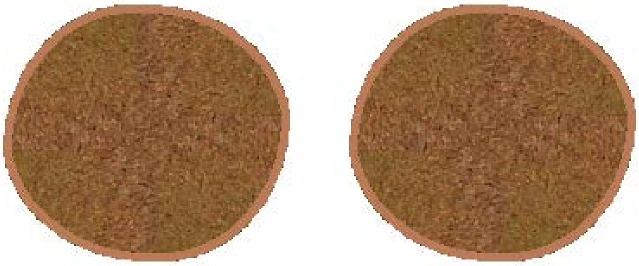


Figura 1.4.1.4-02. Dos círculos en corcho con 120 mm de diámetro.

- pins,

Figura 1.4.1.4-03: Dos conjuntos de cinco pins.

- banda elástica (gomilla),

Figura 1.4.1.4-04: Bandas elásticas (gomillas).

- transcripción, en papel térmico, con caracteres braille en relieve, de una función en la que el mecanismo relativo a la determinación de las imágenes es definido por una tabla,

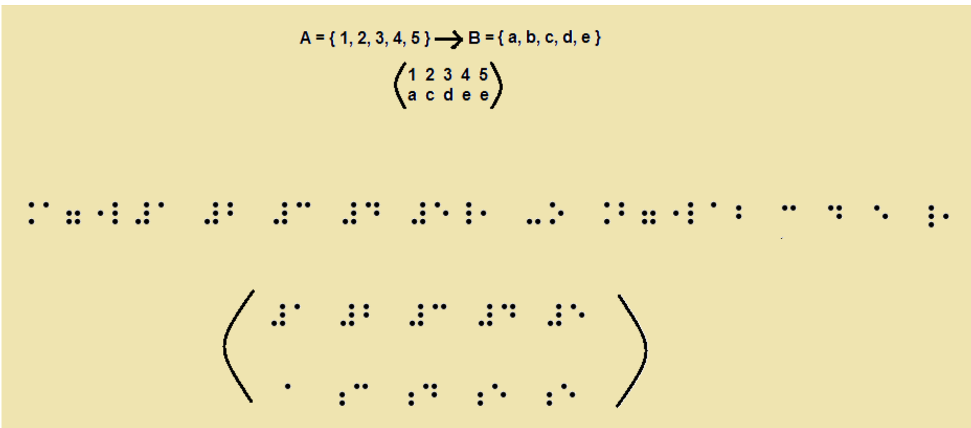


Figura 1.4.1.4-05 Mecanismo definido por una tabla para determinación de las imágenes de una función.

- transcripción en papel térmico, con caracteres braille en relieve, de un mecanismo definido por una ley y relativo a la determinación de las imágenes de una función.

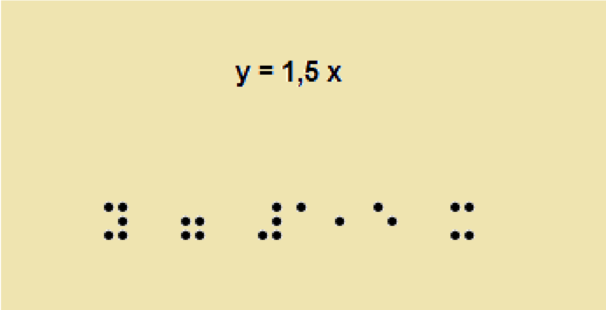


Figura 1.4.1.4-06: Mecanismo definido por una ley para determinación de las imágenes de una función.

Recomendaciones: además del que fue mencionado en el currículo de nivel C hay a referir, también, cómo van a utilizarse los materiales que constan en las figuras anteriores. Así, los dos círculos, representando cada uno de ellos un conjunto, están sobrepuestos a la placa de corcho, a través de un material adherente. Los pins de un mismo tipo serán colocados en un mismo círculo y representan los elementos de ese conjunto. Junto a cada pin podrá ser colocada una etiqueta de identificación en Braille y, en caracteres de uso corriente. Cada vector, relacionando un elemento del primer conjunto con otro elemento del segundo conjunto, será representado a través de una gomilla, uniendo los pins representativos de tales elementos.

El profesor, por cada figura que escribe en el cuadro, hace anticipadamente la respectiva traducción, para el alumno ciego, utilizando los materiales propios para este efecto. De este modo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, intervienen ¡todos!

1.4.2 - El Desarrollo Curricular.

1.4.2.1 - Desarrollo de un currículo de nivel A

En el ámbito de los currículos de nivel A, el desarrollo curricular se hace a través de las siguientes acciones:

- amplia divulgación, por todos los centros educativos, de las orientaciones generales que fueron debidamente establecidas en el diseño de currículo;

- proporcionar a cada centro educativo los medios adecuados para el cumplimento del currículo;

- a través de entidad propia al efecto, asegurar que se cumplen las orientaciones generales del currículo.

1.4.2.2 Desarrollo de un currículo de nivel B

En lo que respecta a los currículos de nivel B, el desarrollo curricular se traduce por el conjunto de acciones enseñaza-aprendizage, inherentes a la respectiva área curricular, que son llevadas a efecto en el centro educativo, por lo conjunto de los profesores, con sus respectivos alumnos; siendo, naturalmente, cada profesor responsable de la ejecución de currículos de niveles C y/o D.

1.4.2.3 - Desarrollo de un currículo de nivel C

Teniendo presente el diseño del currículo presentado en 1.4.1.1 voy a referirme al desarrollo de tal currículo a través de una secuencia de diálogos entre profesor y alumno. Porque considero un grupo integrando por un alumno ciego que llamo Armenio, en homenaje a un alumno con idéntico nombre, también ciego, que formaba parte de un grupo de 7º año de la enseñanza unificada que impartí en 1976-77, en la antigua Escuela Comercial e Industrial de Santarém, cuando ahí realicé una estancia pedagógica como profesor de matemática de la enseñanza básica y secundaria.

En la secuencia de diálogos, por una cuestión de facilidad de presentación de los mismos, además del nombre Armenio voy a referirme a otros cuatro nombres sin ningún significado especial: Berta, Brito, Ernesto y Eva. Los dos primeros corresponden a alumnos con muy buen aprovechamiento escolar, mientras que los otros dos corresponden a alumnos con aprovechamiento escolar significativamente inferior al de los dos primeros.

El currículo de nivel D, específico para el alumno ciego, desarróllase integrado, naturalmente, en el currículo de nivel C concebido para el grupo de 7º año.

(El profesor prepara el material para que Armenio pueda participar en el aula. Para ello efecto coloca a su frente la placa de corcho (figura 1.4.1.4-01) con los dos círculos, también, en corcho (figura 1.4.1.4-02) y en cada uno de estos círculos inserta, de arriba para abajo, 5 pins, refiriendo que el círculo del lado izquierdo representa un conjunto A y los 5 pins, en él insertados, representan los números 1, 2, 3, 4 e 5. Refiere, también, que el círculo del lado derecho representa un conjunto B, y los 5 pins en él insertados, de arriba para abajo, dicen respecto a los elementos a, b, c, d, y e. A continuación, el profesor dice a Arménio que interconecte, con gomillas, el pin 1 con el pin a, el pin 2 con el pin b, el pin 3 con el pin d, y los pins 4 e 5 con el pin e. A continuación, en el cuadro, el profesor presenta la figura siguiente, traduciendo lo que había indicado a Arménio)

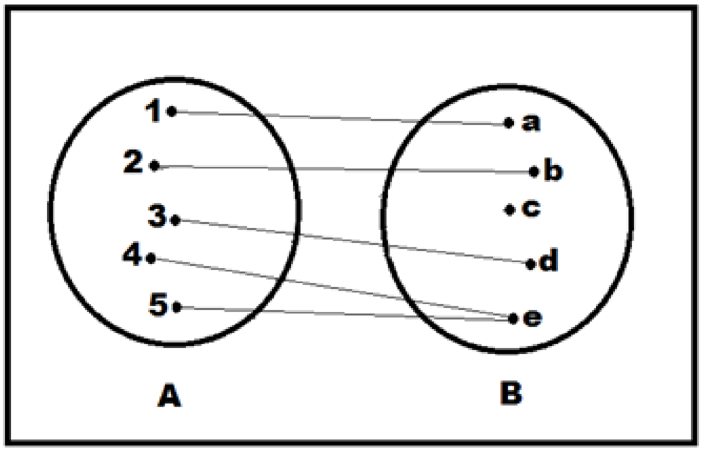


Figura 1.4.2.3-01: Correspondencia unívoca entre dos conjuntos A y B.

Profesor - *La figura que os muestro se relaciona con los dos conjuntos **A** y **B** cada uno con 5 elementos. ¿Están de acuerdo?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Vamos admitir que los conjuntos se refieren a dos equipos de baloncesto y que la figura evidencia una táctica que el entrenador del equipo **A** utilizó para enfrentarse al equipo **B**. ¿Ok?*

(Los alumnos permanecen expectantes)

Profesor - *En esta táctica el jugador **1** marca al jugador **a**; el **2** marca el **b**. Reparen que el **c** no es marcado por nadie, porque el entrenador del equipo A piensa que él no representa ningún peligro. Continuando, el jugador **3** marca el **d**; a su vez el jugador **4** marca el **e** y, reparen bien, el jugador **5** también marca el **e** porque, como sabe, él juega muy bien. ¿Comprendieron la táctica?*

Alumnos - Sí.

Profesor – La táctica que os he descrito representa una correspondencia del conjunto A con el conjunto B. ¿Cierto?

(Profesor hace corta pausa para ver la reacción del grupo)

Profesor – En esta correspondencia, el conjunto A se denomina ***conjunto de partida*** *y al conjunto B vamos a considerarlo por* ***conjunto de llegada****. A los elementos del conjunto A que tienen correspondiente en B vamos a designarlos por* ***objetos****. Noten que, al* ***objeto 1*** *corresponde* ***a****. Al elemento* ***a*** *vamos decir que es la* ***imagen*** *de* ***1****.*

…

Profesor – Armenio, ¿cuál es la imagen del ***2****?*

Arménio - Es el ***b****.*

Profesor - Y, tú Ernesto, ¿cuál es la imagen del objeto ***3****?*

Ernesto - Es el ***c****.*

Profesor - Eva, ¿cuál la imagen del 4?

Eva- Es el ***e***.

Profesor – ¿Y del ***5****?*

Eva – Es también el ***e****.*

Profesor - ¡Muy bien! Dime, Ernesto, ¿cuantas imágenes tiene el objeto ***1****?.*

Ernesto - Tiene una.

Profesor - Ahora para el Armenio: ¿y el objeto ***3****?*

Arménio - Tiene una, también.

Profesor - ¿Y el ***5****?*

(Algunos alumnos dudan)

(Algunos) alumnos – También tiene una.

Profesor – Reparen bien que el ***4*** *tiene una imagen y que el* ***5*** *también tiene una (imagen) y que la imagen del* ***4*** *es igual a la imagen del* ***5****. ¿Entendieron?*

Alumnos – *Sí.*

Profesor – *Noten que podemos afirmar que cada elemento de A tiene, en B, imagen y no tiene más que una. ¿Entendieron?*

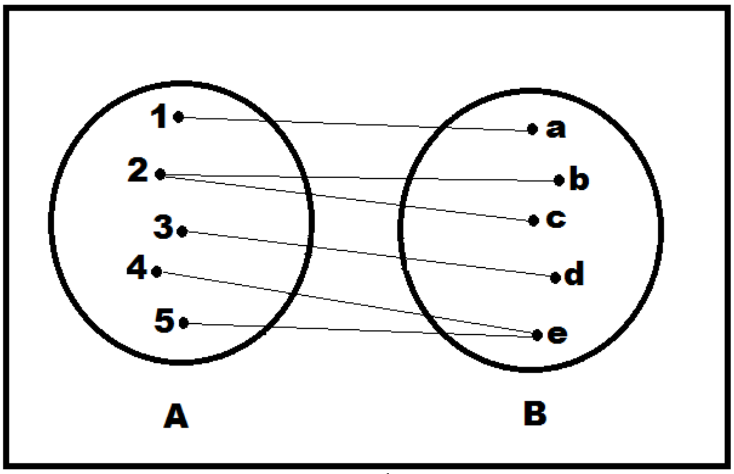
Alumnos - *Sí.*

Profesor – *Estamos, pues, delante de una correspondencia que se dice* ***unívoca****. Entonces, escriban*[41]*: una* ***correspondencia entre dos conjuntos A y B dícese unívoca cuando cada elemento del conjunto A tiene una y una sólo una imagen en B****, esto es, cuando cada elemento del conjunto A tiene imagen en B y no tiene más de que una. ¿Comprendido?*

(La mayoría de los alumnos mueve afirmativamente la cabeza)

Profesor – *Admitamos que durante el juego el entrenador de la equipo A ha constatado que el* ***c*** *también merecía alguna atención. Para ello dio instrucciones al* ***2*** *para estar también atento al* ***c****. ¿Comprendieron?*

(En seguida el profesor muestra en el cuadro una nueva figura y da instrucciones a Armenio para que ponga un gomilla conectando el **2** con el **c**)



1.4.2.3-02: Correspondencia no unívoca entre dos conjuntos A y B

Profesor - *Ernesto, ¿cuantas imágenes tiene el* ***2****?*

Ernesto - *Tiene dos.*

[41] En esa ocasión, Armenio utiliza su Braille Note.

Profesor - *Armenio, ¿cada uno de los elementos del conjunto A tiene imagen?*

Arménio - *Sí.*

Profesor - *Eva, ¿cada uno de los elementos del conjunto A tiene, como máximo, una imagen?*

Eva - *No.*

Profesor - *¿Estamos ante de una correspondencia unívoca?*

(Eva duda y dijo sí. Otros más convencidosos dijeron no)

Profesor (dirigiéndose a Eva) – ¿Por qué entiendes que es una correspondencia unívoca?

Eva – *Porque todos tienen imagen.*

Profesor – *Armenio, ¿de acuerdo?*

Arménio – *No.*

Profesor – *¿Por qué?*

Arménio – *Porque* ***2*** *tiene dos imágenes.*

Profesor – *Muy bien. Para que la correspondencia de A con B sea unívoca es necesario que todos los elementos del conjunto A tengan imagen, mas, no más de que una. Ahora en el caso presente es verdad que todos los elementos del conjunto A tienen imagen en B, pero el* ***2****, tiene más que una imagen. El* ***2*** *tiene precisamente dos imágenes que son el* ***b*** *y el* ***c****. Eva, ¿quedó claro?*

Eva – *Si, profesor.*

Profesor – *Admitamos, ahora, que el jugador* ***b*** *hice una falta grave y fue excluido, temporalmente, de la partida.*

(El profesor muestra en el cuadro una nueva figura interpretativa de la nueva situación y dice a Armenio que retire el pin **b** del conjunto **B, así** como la gomilla que lo conectaba al ***2***)

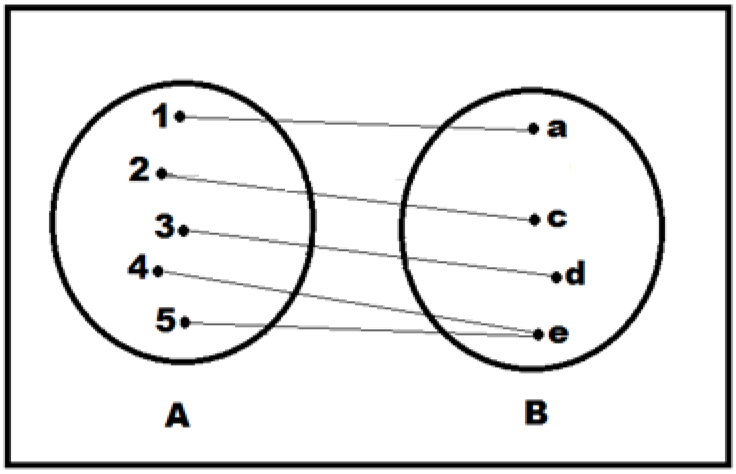


Figura 1.4.2.3-03: Correspondencia unívoca entre dos conjuntos A y B.

Profesor- *Observemos la nueva figura. Ernesto, ¿podemos afirmar que cada elemento del conjunto A tiene imagen en B?*

Ernesto- *Sí.*

Profesor- *Armenio, ¿podemos afirmar que cada elemento del conjunto A tiene una y una sola imagen?*

Arménio - *Sí*

Profesor- *Eva, ¿entonces la correspondencia presentada es unívoca?*

Eva - *¡Sí lo es !*

Profesor - *Muy bien. Admitamos que, por el hecho del tener el equipo B , temporalmente, un jugador menos, que el entrenador del equipo A da instrucciones al 5 para no marcar a nadie. ¿Ok?*

(El profesor muestra una figura adecuada a la nueva situación y dice a Armenio que retire la gomilla que conectaba el ***5*** al ***e***)

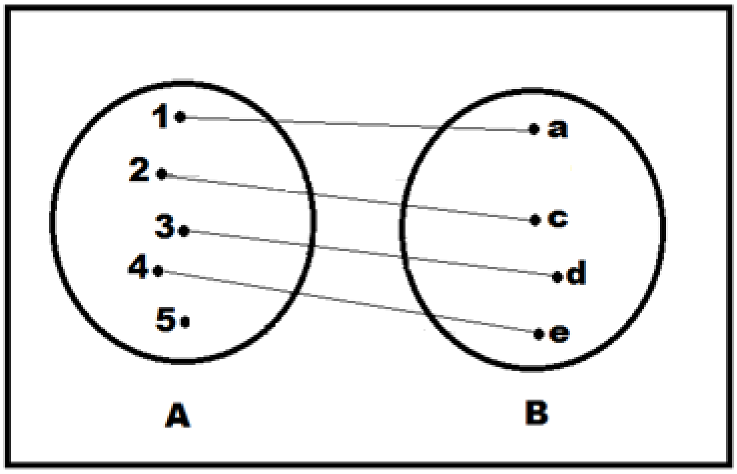


Figura 1.4.2.3-04: Correspondencia no unívoca del conjunto A para el conjunto B.

Profesor –	*¿El 5 tiene imagen?*
Alumnos -	*No.*
Profesor-	*¿Podemos afirmar que cada elemento del conjunto A tiene imagen (en B)?*
Alumnos-	*No.*
Profesor -	*¿Estamos en presencia de una correspondencia unívoca de A para B?*
Alumnos -	*No.*
Profesor -	*Armenio, ¿y si consideráremos la correspondencia de B con A? ¿Se trata de una correspondencia unívoca de B con A?*
Armenio –	*¡Sí!*
Profesor -	*Estoy de acuerdo contigo. Noten bien que en la correspondencia de B con A los objetos están en B y las imágenes están en A.*

(El profesor pide a los alumnos que hagan figuras representando correspondencias entre conjuntos y sugiere que se cuestionen unos a los otros sobre tales correspondencias y, en este ámbito Eva y Armenio trabajan en conjunto)

(El profesor interviene cuando lo entiende oportuno)

(Algún tiempo después)

Profesor –	*Prestad atención, porque es muy importante. En primer lugar recordemos que un conjunto es no* ***vacío*** *cuando tiene, por lo menos, un elemento. ¿Se recuerdan?*
Alumnos -	*Sí.*
Profesor -	*Muy bien. Voy proporcionar, ahora, una definición de mucho interés: "a toda la correspondencia unívoca entre dos conjuntos A e B, no vacíos, dase la denominación de* ***aplicación****,* ***función*** *o* ***transformación*** *de A para B". ¿Han entendido?*
Alumnos -	*Sí.*
	Profesor - En una correspondencia, al conjunto de los objetos dase la denominación de dominio de esa correspondencia y al

	conjunto de las imágenes se da la designación de contradominio. ¿Han entendido?
Alumnos -	*Sí.*
Profesor -	*En una correspondencia unívoca todos los elementos del conjunto de partida son objetos. ¿Cierto?*
Alumnos -	*Sí.*
Profesor -	*Entonces, en una correspondencia unívoca el dominio coincide con el conjunto de partida. ¿De acuerdo?*
Ernesto –	*Profesor, ¿por qué?*
Profesor -	*Armenio, ¿sabes por qué?*
Armenio -	*Si, profesor. Porque en una función todos los elementos del conjunto de partida son objetos.*
Profesor –	*Muy bien. Ernesto, ¿quedó aclarado?*
Ernesto -	*Quedó sí, profesor.*

(El profesor utilizando la figura inicial evidencia que el contradominio no siempre coincide con el conjunto de llegada)
(Los alumnos quedan a la expectativa)

Profesor -	*Una función dícese* ***inyectiva*** *cuando a cualesquier objetos diferentes corresponden imágenes diferentes. Reparen bien: basta que existan dos objetos distintos con igual imagen para que la función no sea inyectiva.*

(En seguida el profesor presenta una figura en el cuadro y da a Armenio las indicaciones necesarias para que en su placa de corcho disponga de una figura semejante a la que está en el cuadro)

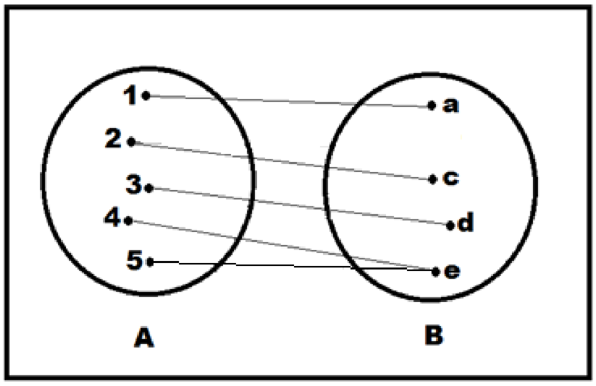


Figura 1.4.2.3-05: Ejemplo de función no inyectiva de A para B.

Profesor –	*Armenio, ¿la correspondencia de A con B es una función?*
Arménio –	*Sí.*
Profesor –	*¿Por qué?*
Arménio –	*Porque es una correspondencia unívoca.*
Profesor -	*¡Muy bien! ¿Y esta correspondencia es una función inyectiva?*
Arménio –	*No lo es, porque los objetos **4** y **5** tienen la misma imagen*
Profesor –	*¡Excelente!*

(El profesor hace una pausa para que Armenio pueda saborear este momento con satisfacción)

Profesor –	*Reparen bien: el conjunto de partida tiene 5 elementos y el conjunto de llegada tiene 4. ¿Será posible, en esta situación, definir una función inyectiva de A para B? Brito, ¿cuál es tu opinión?*
Brito -	*Pienso que no.*
Profesor –	*Y piensas muy bien. Como el conjunto de llegada tiene menos Elementos, entonces el número de imágenes distintas es, naturalmente, inferior al número de objetos. Luego no es posible que a objetos diferentes correspondan siempre imágenes diferentes. ¿Están de acuerdo?*
Alumnos -	*¡Sí!*
Profesor -	*Consideren, ahora, la correspondencia de B con A. Noten, que en este caso, los objetos están en B y las imágenes están en A. Brito, ¿se trata de una correspondencia unívoca de B con A?*
Brito –	*No, porque el **e** tiene dos imágenes (la **4** y el **5**).*
Profesor-	*Muy bien. Escriban, entonces, algunas notas muy importantes. Comencemos por definir lo que es el cardinal de un conjunto. Ahora el cardinal de un conjunto A es el número de elementos de A y representase por #A. El símbolo # se lee "cardinal". ¿Han comprendido?*
Alumnos –	*Sí.*
Profesor -	*Armenio, ¿sabes cómo se representa en braille el símbolo cardinal?*
Arménio -	*Sí, sí. Es el 45 3456.*

(Nota: en braille, la señal # es interpretada por la señal braille compuesta referida en la figura siguiente y cuya interpretación numérica es 45 3456)

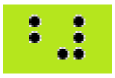


Figura 1.4.2.3-06: El símbolo # en braille.

Profesor - *Muy bien. Continuemos. Si un conjunto A tiene más elementos que un otro conjunto B se escribe en lenguaje matemático #A > #B. En este caso, se puede concluir lo siguiente:*

a) Cualquier función definida de A para B no es inyectiva;

b) La correspondencia inversa de B para A no es una función.

(El profesor analiza con los alumnos, en detalle, las dos afirmaciones)

Profesor- *¿Están de acuerdo?*

Alumnos - *Sí*

Profesor - *Admitamos que el elemento b ha entrado, de nuevo, en el juego y que el entrenador del equipo A no ha dado cualquier instrucción para esta nueva situación. Armenio pon de nuevo el pin **b**, ¿ok?*

Arménio - *Está bien.*

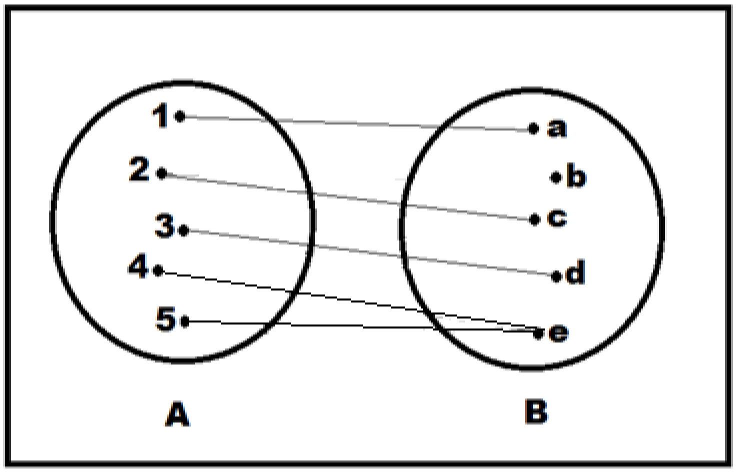


Figura 1.4.2.3-07: Ejemplo de función no inyectiva de A para B.

Profesor - *Ahora el conjunto B ya no tiene menos elementos del conjunto A. ¿La función que la figura muestra es inyectiva?*

Alumnos - *No.*

Profesor - *Armenio, ¿Por qué?*

Arménio - *Porque el **4** y el **5** continúan teniendo la misma imagen.*

Profesor - *¿Y si hiciéremos corresponder el **4** con el **b**?*

(El profesor completa en el cuadro lo que acabó de referir y dice a Armenio que cambie la gomilla que conecta el **4** con el **e** para pasar a conectar el **4** con el **b**)

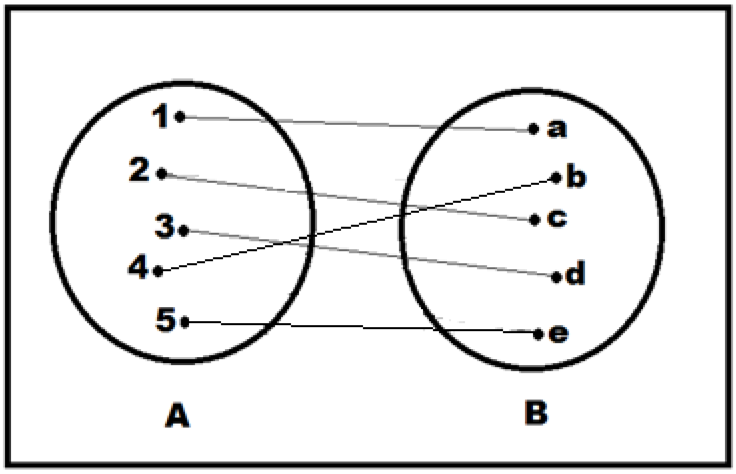


Figura 1.4.2.3-08: Ejemplo de función inyectiva de A para B con #A = #B.

Profesor- *¿Podemos afirmar que la función evidenciada es inyectiva? Así que, ahora ¿a objetos diferentes corresponden imágenes diferentes?*

Alumnos (al unísono) – ¡Sí!

Profesor - *Y la correspondencia inversa de B para A ¿también es una función inyectiva?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Admitamos, ahora, que el elemento 5 del equipo A fue excluido, temporalmente, de la partida.*

(El profesor dice al Armenio que no se olvide de retirar el pin 5 así como la correspondiente gomilla)

Profesor - *¿La función representada en la figura es inyectiva?*

Alumnos - *Sí.*

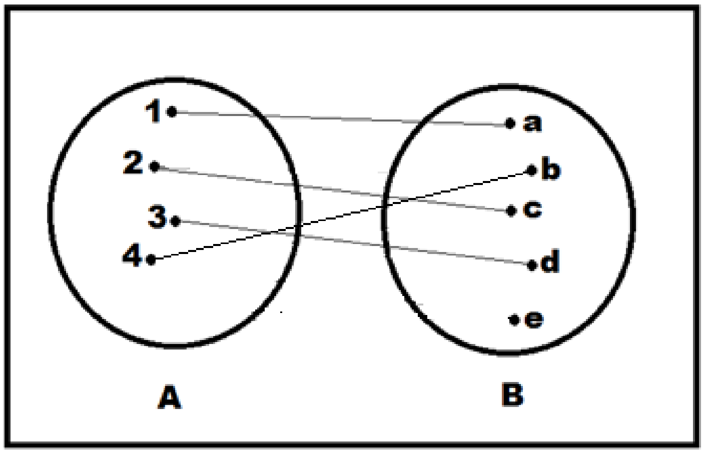


Figura 1.4.2.3-09: Ejemplo de función inyectiva de A para B, con #A < #B.

Profesor - *Notad que si el conjunto A tuviere el mismo número de elementos que el conjunto B, o hasta menos, una función de A para B podrá ser o no inyectiva; pero si el conjunto A tuviere más elementos que B entones, seguramente, no será inyectiva. ¿Cierto?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Y la correspondencia inversa de B para A también es una función inyectiva?*

(Se oyen varias respuestas)

Profesor – *¿La correspondencia de B para A es una función?*

Alumnos – *¡No!*

Profesor - *Claro. La correspondencia de B para A no es una función*. *Fíjense en lo siguiente: el conjunto B tiene más elementos que el conjunto A, luego cualquier correspondencia de B para A puede ser o no función. Siendo una función ésta alguna vez podrá ser inyectiva. ¿Ok?*

Alumnos - *Ok.*

Profesor - He referido que iba a presentar dos conceptos de mucho interés: el de función inyectiva y el de función suprayectiva. Ya hemos visto en qué consiste una función inyectiva. Analicemos, ahora, el concepto de función suprayectiva.

(Los alumnos quedan a la expectativa)

Profesor - *Una función dícese **suprayectiva** cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes, esto es, cuando el contradominio de la función coincide con el conjunto de llegada. Basta que haya un elemento del conjunto de llegada que no sea imagen para que la función no sea suprayectiva. ¿Han comprendido?*

(En seguida el profesor solicita a los alumnos que observen la figura que tienen enfrente)

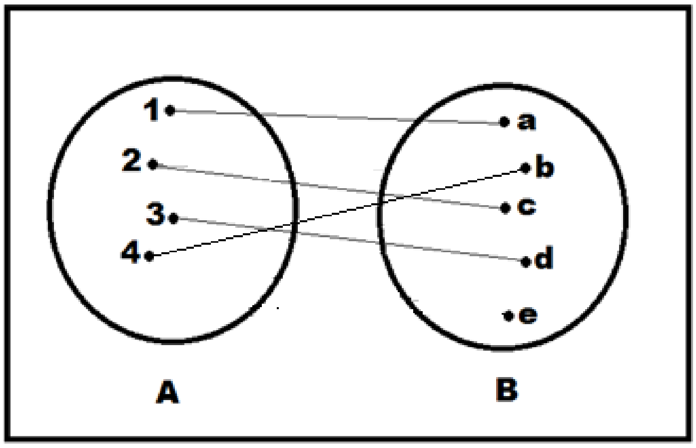


Figura 1.4.2.3-10: Ejemplo de función no suprayectiva de A para B.

Profesor – *Armenio, ¿el elemento **e** forma parte del contradominio?*

Armenio - *No, no forma parte.*

Profesor - *Entonces, ¿la función es suprayectiva?*

Armenio - *No, no es suprayectiva.*

Profesor - *Muy bien. El contradominio no coincide con el conjunto de llegada. ¿Han comprendido?*

Alumnos- *Sí.*

Profesor - *Noten bien. Si el conjunto de llegada tuviere más elementos que el conjunto de partida la función no es, nunca, suprayectiva. ¿Están de acuerdo?*

Alumnos- *Sí.*

Profesor - *Consideren la correspondencia inversa de B para A. ¿Trátase de una correspondencia unívoca? Ernesto, ¿qué te parece?*

Ernesto - *No lo es.*

Profesor - *¿Por qué?*

Ernesto - *Porque el* ***e*** *no tiene imagen.*

Profesor - *Muy bien. La correspondencia inversa de una función no suprayectiva no es una función. Noten bien. Si la función de A para B no es suprayectiva significa que en B hay elementos "sobrantes", esto significa que hay elementos del conjunto de llegada que no son imágenes. Cuando se viene en el sentido contrario los elementos de B son considerados los objetos y los tales elementos sobrantes por no tener imagen en A, hacen con que la correspondencia de B para A no sea unívoca, luego no es función. ¿Ok?*

Alumnos - *¡Ok!*

Profesor - *Admitamos, que el elemento* ***e*** *hizo una falta grave y, por consecuencia, también fue excluido temporalmente. Ahora cada uno de los equipos queda con cuatro elementos. ¿Ok?*

(el profesor dice a Armenio que retire el pin **e**)

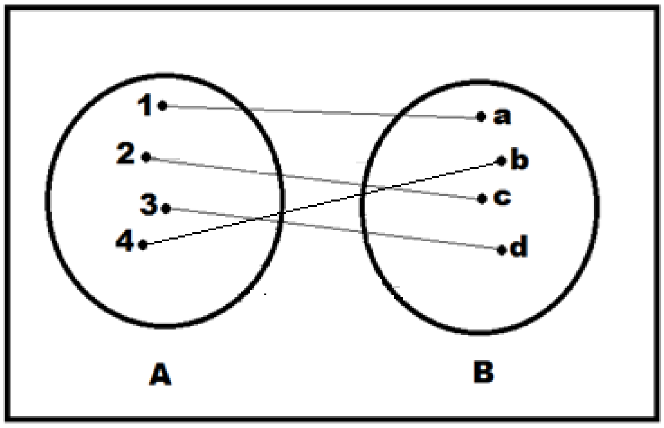


Figura 1.4.2.3-11: Ejemplo de función suprayectiva de A para B.

Profesor - *Armenio, ¿la función representada en la figura es suprayectiva?*

Arménio - *Sí lo es. ¡Ah! ¡Es, curioso, también es inyectiva!*

Profesor - *Muy bien. Tienes toda la razón. La función es suprayectiva y es inyectiva. Esta función por ser, simultáneamente, inyectiva y suprayectiva dícese* ***biyectiva****.*

Arménio - *¡Ah!*

Profesor - *Berta, ¿para que una función sea biyectiva los conjuntos de partida y de llegada pueden tener cardinales diferentes?*

Berta - *Bien, si el conjunto de partida tiene más elementos la función no puede ser inyectiva, ¿no lo es?*

Profesor - *Continua*

Berta - Si el conjunto de llegada tuviere más elementos que el conjunto de partida la función no puede ser suprayectiva, ¿estoy cierta?

Profesor - *Muy bien, ¿y entonces?*

Berta - *Entonces, para que una función sea biyectiva los dos conjuntos deben tener el mismo número de elementos.*

Profesor - *¡Impecable!*

(El profesor hace una pausa y Berta sonríe satisfecha)

Profesor – *En la figura está representada una función biyectiva de A para B. Analicen, ahora, la correspondencia inversa de B para A. ¿Cómo la clasifican? Eva, ¿trátase de una función?*

Eva - *¡Oh! También es una función biyectiva.*

Profesor - *Muy bien, Eva. Solamente las correspondencia inversas de Funciones biyectivas son, también, funciones y, en este caso, son, igualmente, biyectivas. ¿Ok?*

Ernesto - *Profesor, no he comprendido muy bien.*

Profesor - Mira Ernesto. Vamos a considerar una función inyectiva y no suprayectiva.

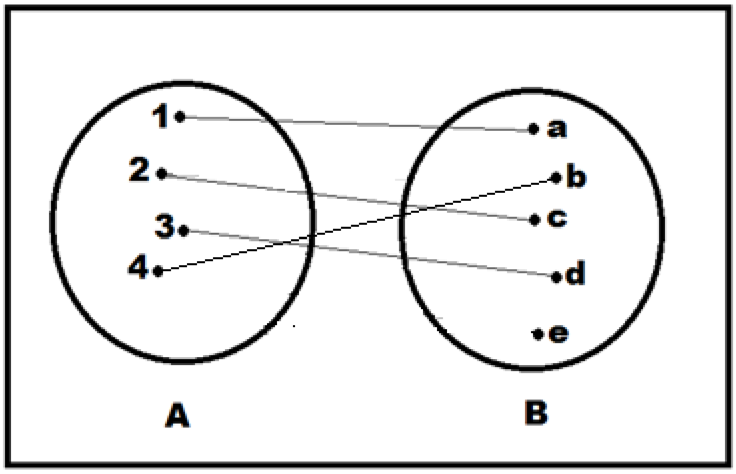


Figura 1.4.2.3-12: Ejemplo de función inyectiva y no suprayectiva de A para B

(el profesor da instrucciones para que e Armenio, con su material, construya una figura idéntica)

Profesor- *En este caso el conjunto de llegada tiene más elementos que el conjunto de partida. ¿De acuerdo?*

Ernesto - *Sí, Profesor.*

Profesor - *Estamos en una situación en que en el conjunto de llegada hay un elemento "sobrante". ¿De acuerdo?*

Ernesto - *Sí.*

Profesor - *¿La correspondencia inversa de esta función es una función?*

Ernesto - *No, porque falla el **e**.*

Profesor - *Muy bien. Pensemos ahora en una correspondencia suprayectiva y no inyectiva.*

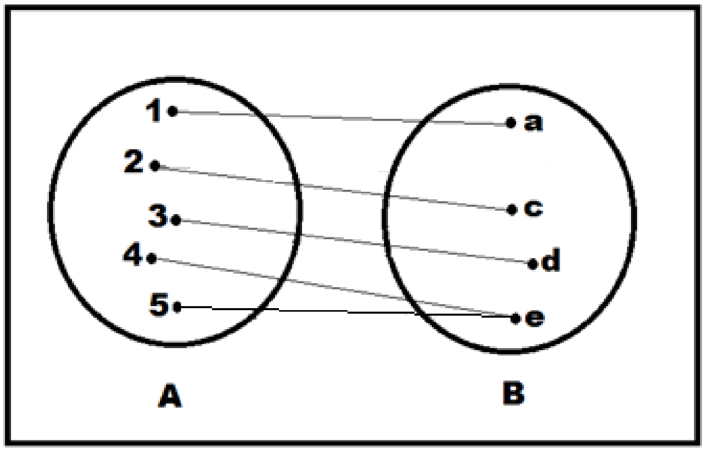


Figura 1.4.2.3-13: Ejemplo de función suprayectiva y no inyectiva de A para B.

(Tal como anteriormente, el profesor da instrucciones para que Armenio, con su material, construya una figura idéntica)

Profesor - *Hay dos objetos que tienen la misma imagen. ¿Ok?*

Ernesto - *Sí, profesor.*

Profesor - *¿La correspondencia inversa es una función?*

Ernesto - *No.*

Profesor - *¿Por qué?*

Ernesto - *Falla el **e**.*

Profesor - *Exactamente. El **e** tiene dos imágenes, el **4** y el **5**, luego la correspondencia inversa no es unívoca por lo que no es una función. En conclusión: si una función no es inyectiva o no es* *suprayectiva la correspondencia inversa no es una función. Hay siempre algo que falla. ¿De acuerdo?*

Ernesto - *Sí.*

Profesor - *Así, solamente las funciones que son biyectivas, esto es, que son, simultáneamente, inyectivas y suprayectivas tienen correspondencias inversas que son funciones. ¿Ok?*

Ernesto – *Sí.*

Profesor – *Y en ese caso tales funciones también son biyectivas ¿Has comprendido, ahora?*

Ernesto - *Sí, profesor, Gracias.*

(Para verificar si el tema impartido ha quedado bien percibido el profesor lanza al aire una cuestión)

Profesor - *¿Quién sabe cuáles son las funciones cuyo contradomínio coincide con el conjunto de llegada?*

(En esa ocasión Berta levanta el brazo)

Profesor - *Berta, ¿cuáles son?*

Berta - *Son las funciones suprayectivas.*

Profesor - *Muy bien. En las funciones suprayectivas todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.*

Eva - *¿Y en las biyectivas también?*

Profesor - *Mira, Eva, cuando referimos todas las funciones suprayectivas ya estamos incluyendo las biyectivas porque estas son, simultáneamente suprayectivas e inyectivas ¿Cierto?*

Eva - *Sí, profesor.*

Profesor - *El tipo de figuras que hemos venido a utilizando dícese* ***diagrama de flejas****. Por lo tanto, nosotros hemos analizado una forma muy especial de representar funciones. Esta forma de representar una función es muy útil cuando los conjuntos de partida y de llegada tienen pocos elementos. También, en este* *caso, podemos utilizar una representación a través de una tabla, como voy evidenciar para la última función que hemos estudiado.*

(El profesor entrega a Armenio una hoja en papel térmico con caracteres braille en relieve, figura 1.4.1.4-05, y escribe en el cuadro lo siguiente

A = {1, 2, 3, 4, 5} → B = {a, b, c, d, e}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & c & d & e & e \end{pmatrix} \qquad).$$

Profesor - *En el cuadro está representada una función entre los conjuntos A y B siendo el mecanismo de determinación de las imágenes representado por la tabla. En ésta, se escriben los elementos del conjunto de partida en la 1ª línea y por debajo de cada uno de ellos la respectiva imagen.*

Alumnos - *Es muy simple.*

Profesor - *Hasta ahora, hemos presentado dos representaciones distintas para el mecanismo de determinación de las imágenes. La primera fue a través de la utilización de un diagrama de flechas; la segunda a través de una tabla, ¿han comprendido?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Las funciones son entidades matemáticas de gran importancia. Ellas tienen muchas aplicaciones en la vida real y ocurren en situaciones tan simples como, por ejemplo, en las máquinas automáticas en que por cada moneda de 50 céntimos que se introduce la máquina proporciona una piruleta.*

(Los alumnos quedan en la expectativa de más explicaciones)

Profesor - *Hay aquí una correspondencia unívoca entre las monedas de 50 céntimos que se introducen en la máquina y las piruletas que ella proporciona. Noten que la máquina tiene un comportamiento anormal cuando no actúa como función. Tal ocurre cuando se introduce una moneda de 50 céntimos y no sale piruleta, situación muy desagradable para quien ha puesto la moneda. Estamos ante una situación en que hay un elemento del conjunto de partida, la* *moneda que se ha introducido, que no tiene imagen. Otra situación ocurre cuando se introduce una moneda de 50 céntimos y la máquina proporciona más de una piruleta, situación poco agradable para el comerciante. Aquí, a un objeto, la moneda, corresponde más de que una imagen. ¿Han entendido?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Veamos, ahora, otro ejemplo. Piensen en una bomba de gasolina. Tratase, también, de un mecanismo que materializa una función. Veamos cómo: admitamos que la cuantidad de gasolina que se retira de la bomba es el objeto y que la respectiva imagen es su costo. Admitiendo, por ejemplo, que cada litro de gasolina cuesta 1,5 euros. Dime Eva, ¿cuál es el costo de 2 litros de gasolina?*

Eva - *Son 3 euros, profesor.*

Profesor - *Muy bien, Eva. Podemos entonces decir que al objeto 2, que se refiere a la cantidad de gasolina, en litros, corresponde la imagen 3 que es el valor, en euros, del costo correspondiente. ¿Cierto?*

Eva - *Sí.*

Profesor - *Ernesto, y si es 4 litros la cuantidad de gasolina retirada de la bomba. ¿Cuál es su costo?*

Ernesto - Son 6 euros, profesor.

Profesor - *Muy bien, Ernesto. ¿Cuál es la imagen del objeto 4?*

Ernesto - *Es 6.*

Profesor - *Muy bien. Dime Armenio, ¿cuál es la imagen del objeto 10?*

Arménio - *Son 10 veces 1,5.*

Profesor - *Sí, ¿pero qué valor es ese?*

Arménio - *Es 15.*

Profesor – *Muy bien ¿y si el objeto fuese el 20?*

Arménio - *La imagen seria el 30.*

Profesor - *Eso mismo. ¿Y se la cuantidad de gasolina retirada de la bomba fuese de x litros?¿Cuál sería su costo?*

Arménio- *Seria de x veces 1,5 (euros).*

Profesor - *Muy bien. Para si obtener la imagen correspondiente al objeto **x** utilizase la expresión **1,5 x**. ¿Han comprendido?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Una vez que hemos utilizado la variable* ***x*** *para representar un objeto genérico, vamos utilizar otra variable, por ejemplo* ***y****, para representar la correspondiente imagen genérica. Berta, ¿cuál es la relación entre estas dos variables?¿El* ***y*** *es igual a qué?*

(En esta ocasión el profesor entrega a Armenio una segunda hoja en papel térmico, tal como consta en la figura 1.4.1.4-06)

Berta - *Profesor, será* ***y=1,5 x****?*

Profesor – *Muy bien Berta. La expresión* ***y=1,5 x*** *traduce matemáticamente una función en que los objetos son números, no negativos, reportándose a la cuantidad de gasolina retirada de la bomba, y las imágenes son los respectivos costes, en euros. ¿Han comprendido?*

Alumnos - *Sí.*

Profesor - *Estamos ante una nueva forma de representación de funciones. En esta nueva forma las imágenes son determinadas a través de una ley. En el ejemplo que he presentado a vosotros, sería poco práctico la construcción de un diagrama de flechas o de una tabla para la determinación de las imágenes, pues, son numerosas las situaciones en juego. ¿Ok?*

Alumnos - *¡Ok!*

Profesor - *Como ya hemos analizado, para definir una función, necesitamos de un conjunto de partida no vacío, continua Brito.*

Brito - *De un conjunto de llegada, también, no vacío, y de un proceso que permita determinar la imagen de un objeto cualquiera.*

Profesor - *Muy bien. Me dice, Arménio, ¿de cuántos modos puede materializarse el proceso para determinación de las imágenes?*

Arménio - *El proceso puede materializarse a través de un diagrama de flejas, de una tabla o de una ley.*

Profesor - *Muy bien. Ahora, para una mejor comprensión de los conceptos que hemos analizado voy sugerir un conjunto de ejercicios que deben hacer en casa. ¿Están de acuerdo?*

La generalidad de los alumnos – Sí.

Arménio (siempre disponible para la broma) – ¡Por favor, no!

1.4.3 - La Evaluación.

La evaluación es la componente del currículo que se materializa a través de procesos de recoja y tratamiento de información o complementados por proceso de valoración en los cuales se utiliza un conjunto de parámetros de referencia previamente definidos.

En VILAR (1992, p. 24)[42] evidenciase que la información recogida debe satisfacer los principios de la claridad, de la oportunidad, de la exactitud, de la validez e de la amplitud. Estos cinco principios pueden enunciarse del modo siguiente:

1º) principio de la claridad: la información debe ser inteligible para quien tiene que a tratar;

2º) principio de la oportunidad: la información tiene que ser recogida y/o fornecida en tiempo útil;

3º) principio de la exactitud: la información debe ser lo más objetiva posible;

4º) principio de la validez: la información debe asegurar una correcta relación con la realidad que la genera;

5º) principio de la amplitud: la información debe potenciar decisiones alternativas.

Después de la valoración de la información, se siguen, naturalmente, actos de reflexión que son el soporte del proceso de regulación y/o de control que están en la base de tomas de decisión. Estas pueden contemplar una, o más, de las siguientes situaciones:

- formulación de juicios;
- acciones de seriación y/o selección;
- reformulación del currículo y/o del modelo curricular.

[42] Citando CRONBACH (1963).

Una de los grandes propósitos de la evaluación es comprobar hasta qué medida los objetivos establecidos en el diseño del currículo fueron, o no, alcanzados. Dado que siempre hay un contexto social subyacente a la realización del currículo, la evaluación se podrá considerar, por ello, en sentimientos de realización (o frustración) personal o colectiva. En este contexto es deseable que haya una preocupación constante en la maximización de los sentimientos de realización y, consecuentemente, en la minimización de los sentimientos de frustración. A mi entender, uno de los caminos conducentes a este *desideratum* consiste, de una forma ponderada, en elogiar lo que de excelente fue realizado e incentivar una cultura de "aprender con los errores", estimulando a los intervinientes (personas singulares o personas colectivas) a una búsqueda gradual de progresos, teniendo cuenta, naturalmente, alcanzar los objetivos establecidos.

En términos generales, la evaluación deberá contemplar no sólo a los alumnos y a los profesores, que directamente participan en la ejecución del currículo, a nivel de los procesos de enseñanza/aprendizaje, sino que, también, a los que tienen responsabilidades organizativas para que el desarrollo del currículo se procese en condiciones adecuadas; así como a los que han concebido el diseño del currículo base y, en última instancia, a los responsables del modelo que ha servido de soporte al diseño del currículo.

1.4.3.1 - Evaluación de los alumnos

La evaluación de los alumnos contempla las siguientes facetas distintas:

- evaluación de diagnóstico;
- evaluación formativa;
- evaluación sumativa;
- auto-evaluación;
- evaluación continua;
- evaluación interna;
- evaluación externa.

Con la evaluación de diagnóstico se pretende analizar cuál es lo grado de preparación que un alumno posee teniendo en cuenta la adquisición de nuevos conocimientos. Con base a esta evaluación el profesor deberá proporcionar los conocimientos mínimos indispensables para que el grado de preparación del alumno sea el adecuado al fin propuesto.

La evaluación formativa, como realza Luiza Cortesão[43], desempeña el papel de una "**brújula orientadora del proceso enseñanza-aprendizaje**". Este tipo de evaluación tiene por objetivo permitir identificar, en términos cualitativos, cuál es el progreso que el alumno realiza en el ámbito de una unidad didáctica, o en una secuencia de unidades didácticas, facilitando de este modo la introducción de medidas compensatorias, en tiempo oportuno, para que los aprendizajes curriculares sean llevados a cabo dentro de lo previsto. La evaluación formativa solo podrá ser realmente eficaz se existe una relación de gran complicidad entre profesor y alumno, quizá, entre profesor-alumnos-padres y encargados de la educación.

La evaluación sumativa es hecha al final de una unidad didáctica, o una secuencia de unidades didácticas, al final de un período escolar, al final de un año lectivo o al final de un ciclo de estudios (exámenes). Ella se traduce por un valor numérico, en el ámbito de una determinada escala, y pretende reflejar, en términos globales, cuál sea el grado de conocimientos adquiridos por el alumno en lo relativo a las metas curriculares previstas.

La autoevaluación consiste en un conjunto de reflexiones que cada uno hace sobre el trabajo que ha realizado, siendo deseable que lo comparta con su profesor y, también, con sus compañeros.

La evaluación continua es una evaluación con carácter globalizante, efectuada en determinados momentos del año lectivo, que tiene el cariz de una clasificación final al terminar el año lectivo. La evaluación continua incluye bien

[43] CORTESÃO (1993, p. 13).

las evaluaciones formativas sumativas, realizadas en el período al que la evaluación continua hace relación.

Al final de un año lectivo, la evaluación realizada en la Escuela, que se traduce por una calificación numérica, tiene la denominación de evaluación interna en contrapunto a la evaluación externa que se concretiza a través de la realización de un examen, hecho debajo de la responsabilidad del Ministerio de la Educación.

1.4.3.2 - Evaluación de los profesores

En Portugal, la reglas de evaluación de los profesores están definidas en el decreto nº 26/2012, de 21 de Febrero; en lo que se refiere a la evaluación se incide sobre las vertientes:

- científico-pedagógica,
- participación en la vida de la escuela y relación con la comunidad educativa,
- formación continua y desarrollo profesional, y contempla dos modalidades: la autoevaluación y la evaluación del trabajo.

La autoevaluación, en el caso de ser realizada con el objetivo de ser puesta a la apreciación de evaluadores pertenecientes a los cuadros de la Escuela, se elabora según parámetros definidos por su Consejo Pedagógico, o, también, definidos por las entidades superiores si la autoevaluación es hecha con la intención de ser apreciada por evaluadores externos.

El diploma en cuestión se refiere, también, a un régimen especial de evaluación de los docentes colocados en la cumbre de la carrera (8º, 9º o 10º escalones) y/o que desempeñan funciones de subdirector, adjunto, asesor de dirección, evaluador o coordinador de departamento curricular.

Naturalmente que a la par de la autoevaluación llevada a cabo (según reglas establecidas, o por el consejo pedagógico o por las entidades superiores) nada impide que el docente pueda efectuar una autoevaluación de cariz libre, donde reflexiones sobre sus prácticas y pueda compartir tales reflexiones con sus alumnos, en el ámbito de los grupos, o con sus colegas, en el ámbito del Consejo de Asignatura.

En lo que se refiere a la evaluación externa debe ser señalado que tiene lugar para los docentes en períodos probatorios, que ocurren en los 2º y 4er. escalones de la carrera docente[44], o siempre que los docentes la requieran, cuando aspiren a una clasificación de "excelente".

En una evaluación externa tiene un aspecto fundamental la observación de aulas y el seguimiento de la práctica pedagógica y científica del evaluado hecha por evaluadores externos

1.4.3.3 - Evaluación de los Centros Educativos

Para los Centros Educativos (Escuelas o Agrupamientos de Escuelas) la evaluación contempla las modalidades de autoevaluación y evaluación externa.

La autoevaluación se hace de acuerdo con el modelo CAF (Common Assessment Framework) que en Portugal tiene la designación de **Estructura Común de Evaluación**. Trátase de un modelo a través del cual un organismo público, en general, y un centro educativo, en particular, identifica los puntos fuertes bien como los puntos donde es necesario introducir mejoras, en una perspectiva de una mejora constante, con vistas a la práctica de una cultura de excelencia.

El modelo de evaluación CAF fue presentado en la 1ª Conferencia de la Calidad de las Administraciones Públicas, llevada a cabo en Lisboa, de 10 a 12 de mayo de 2000, siendo resultado de un trabajo conjunto de peritos de diversos países, en al ámbito de la Unión Europea, como una simplificación del

[44] en Portugal la carrera docente contempla 10 niveles.

Modelo de Excelencia de la EFQM (European Foundation for Quality Management).

En términos muy globales el Modelo CAF utiliza nueve criterios distribuidos por dos grandes grupos, tal como se evidencia a continuación:

Criterios del modelo CAF

Relativos a los medios:

1) El liderazgo de la institución educativa se hace para:	a) dar una orientación a la institución educativa desarrollando la visión, misión y valores; b) desarrollar e implementar un sistema de gestión pedagógico y administrativa y de gestión del cambio; c) motivar y apoyar las personas y servir de modelo; d) administrar las relaciones con los políticos y con las otras partes interesadas para asegurar una responsabilidad compartida.
2) Cómo la Escuela implementa el Proyecto Educativo a través de:	a) una estrategia claramente centrada en las expectativas de los alumnos y de los diferentes sectores de la comunidad educativa; b) estrategias efectivamente factibles a diferentes niveles; c) actividades relevantes inscritas en los Planes Anuales de Actividades
3) Cómo la Escuela genere sus recursos humanos:	a) desarrollando los saberes y el potencial del personal docente y personal no docente; b) promoviendo el trabajo en equipo y potenciando el trabajo individual; c) de acuerdo con los presupuestos del Proyecto Educativo.
4) Cómo la Escuela realiza las planificaciones y genere los recursos y asociaciones de modo como:	a) viabilizar los Planes Anuales de Actividades y el Proyecto Educativo; b) potenciar sus recursos internos y asociación con entidades externas; c) apoyar la estrategia de la escuela y sus procesos
5) Cómo la Escuela concibe, genera y mejora sus procesos de:	a) enseñanza y aprendizaje; b) gestión y administración; c) gestión del cambio.

Relativos a los resultados

6) Lo que a Escuela desea alcanzar con respecto a sus interesados	a) alumnos; b) encargados de educación.
7) Lo que a Escuela desea alcanzar en lo relativo al personal:	a) docente; b) no docente.
8) Lo que a Escuela desea alcanzar relativo a la sociedad a nivel	a) local; b) nacional; c) internacional
9) Los resultados alcanzados por la Escuela ante los:	a) objetivos definidos en el Proyecto Educativo; b) recursos utilizados.

Como nota señalase que:

- una grande ventaja de este modelo es permitir la comparación de resultados entre instituciones del mismo tipo;
- en lo que respecta a la evaluación externa, se lleva a cabo por la Inspección General de la Educación con objetivos que están en articulación con los criterios definidos para el modelo CAF.

1.4.3.4 - Evaluación del Sistema de Enseñanza

Las evaluaciones del Sistema de Enseñanza pueden asumir el carácter de autoevaluaciones y de evaluaciones externas. En el ámbito de las autoevaluaciones hay que señalar las evaluaciones indicadas. Estas consisten en la realización de pruebas escritas sobre asignaturas estructurantes, elaboradas por especialistas, como la Matemática o la Lengua materna, al final del año lectivo y, también, en años escolares que se encuentren al final de un ciclo de estudios.

Las evaluaciones tienen un ámbito nacional, pues en ellas participan todos los alumnos, y su objetivo no es evaluar a los discentes sino solamente, los currículos de las asignaturas en cuestión.

También, en el ámbito de las autoevaluaciones, además de las evaluaciones referidas, naturalmente los responsables del sistema de enseñanza, para los fines que entendieren por conveniente, pueden y deben utilizar toda la información que los exámenes nacionales proporcionan, así como la información inherente a las evaluaciones de los centros educativos y, también, naturalmente, los pareceres proporcionados por sectores de la sociedad civil como, por ejemplo, las diversas organizaciones de profesores.

En el que respecta a las evaluaciones externas, hay una modalidad que asume grande importancia: se trata del sistema de evaluación PISA (*Programme for International Student Assessment*) lanzado en 1997 por iniciativa de los países miembros de la OCDE (*Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico), pero abierto, también, a otros países o economías que sean miembros de esta organización.*

El proyecto PISA permite monitorizar, de una forma regular, competencia de los alumnos (jóvenes con 15 años de edad) en tres dominios fundamentales: literatura, matemática e ciencias. El objetivo fundamental del PISA no es evaluar a los jóvenes en lo que concierne a sus conocimientos relativos a los currículos oficiales sino, evaluar sus capacidades para que utilicen sus conocimientos, en los dominios referidos, de forma que afronten los desafíos que se presentan en la vida cotidiana, sea en contextos personales, sea sociales, y también, globales.

Según Anabela Serrão[45] en el PISA se define

> *"…competencia de lectura, como la capacidad del individuo para comprender, usar, reflexionar sobre y apropiarse de textos escritos, de forma que alcance sus objetivos, desarrollar el proprio conocimiento y potenciar y participar en la sociedad".*

> *"…competencia científica como el conocimiento científico de un individuo y utilización de ese conocimiento para: identificar cuestiones científicas; adquirir nuevos conocimientos; explicar fenómenos científicos y sacar conclusiones basadas en evidencias sobre temas relacionados con la*

[45] SERRÃO (2011).

ciencia; comprender los aspectos característicos de la ciencia como forma de conocimiento y de investigación humana; tener consciencia de la forma según la cual, ciencia y tecnología configuran nuestros ambientes material, intelectual y cultural; favorecer la implicación en cuestiones relacionadas con la ciencia, así como con ideas científicas, como ciudadano reflexivo".

"… competencia matemática, como la capacidad de analizar, raciocinar y comunicar ideas con eficacia en la medida que proponen, formulan y solucionan problemas matemáticos e interpretan soluciones en una diversidad de situaciones".

El PISA se realiza por ciclos, de 3 en 3 años, con predominio, en cada ciclo, de uno de los dominios en relación con los otros dos y, en lo que respecta a la evaluación, la OCDE utiliza una escala con media de 500 puntos y desviación estándar de 100 puntos, teniendo como referencial los objetivos de los países de la OCDE[46].

Hasta, ahora, han sido efectuados 5 ciclos. Por curiosidad, indicamos lo siguiente:

- el primer en el año 2000, con predominio de la competencia en literatura. En él han participado 265.000 jóvenes de 32 países, de los cuales 28 pertenecientes a la OCDE. En Portugal el estudio ha contemplado a 4.604 alumnos, con 15 años de edad, como fue señalado, desde el 5º año hasta al 11º año de escolaridad. Estuvieran implicadas 149 escuelas;

- el segundo fue en 2003, con énfasis en la competencia en matemáticas. En este ciclo han participado más de 250.000 jóvenes de 41 países de los cuales 30 miembros de la OCDE. En Portugal el estudio ha contemplado 4.608 alumnos y estuvieron envueltas 153 escuelas;

[46] MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2013).

- el tercero ha sido en 2006, con realce para la competencia científica. Han participado más de 200.000 jóvenes de 60 países, incluyendo la totalidad de los miembros de la OCDE. En Portugal el estudio ha contemplado 5.109 alumnos siendo de 172 el número de escuelas implicadas;

- el cuarto en 2009, nuevamente con predominio en la competencia en literatura. En este ciclo[47] Portugal ha participado con 6.298 alumnos pertenecientes a 212 escuelas, habiendo obtenido la 21ª posición en un conjunto de 33 países de la OCDE que han participado.

- el quinto y último ciclo, se realizó en 2012, con la participación de 65 países, incluyendo los 34 países integrantes de la OCDE, habiendo incidido con particular en la competencia en matemáticas. Portugal ha participado con 5.722 alumnos portugueses, siendo la media de los resultados, en competencia matemática, de 487 pontos, lo que coincidió con igual media en el ciclo anterior, y que, curiosamente se ha traducido en una subida de tres posiciones en la tabla ordenada de los resultados en esta componente y en una progresión de 21 puntos, con respecto al resultado obtenido en 2003, año en que la matemática fue, también, el dominio principal. Con la puntuación de 487 puntos, Portugal se ha posicionado en la media da la OCDE. Reálcese, también, a título de curiosidad, que Portugal, en las competencias en literatura y en ciencias, ha obtenido 488 y 489 puntos, respectivamente, siendo la media de los países de la OCDE, en estos dos dominios, de 496 y 501 puntos, también, respectivamente[48].

Para señalar la evolución de las clasificaciones obtenidas por los jóvenes portugueses, durante las diversas realizaciones del proyecto PISA, se presenta la figura siguiente[49] donde se puede constatar que, en términos globales, hay una evolución positiva en cada uno de los tres dominios considerados.

[47] MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2012).
[48] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2013).
[49] Figura obtenida a partir de un articulo de Andreia Sanches, intitulado “Alunos portugueses mostram como em pouco tempo é possível melhorar, diz OCDE” en la INTERNET en el sitio

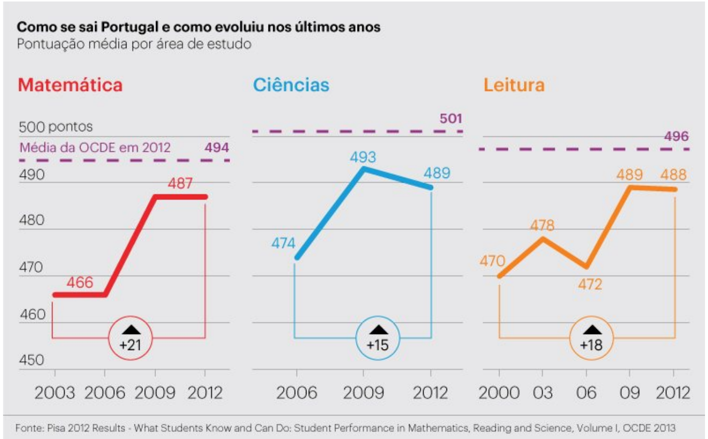


Figura 1.4.3.4-01: Cómo Portugal ha evolucionado en el ámbito del PISA.

El PISA, inequívocamente, constituye un instrumento político muy útil a los gobernantes de los diversos países pues, al conocer la evolución del desarrollo de los sistemas de enseñanza de los países participantes, podrán encontrar, ahí, un fuerte incentivo para la toma de decisiones que puedan mejorar la calidad y la eficiencia del sistema de enseñanza de que son responsables.

<URL:http://www.publico.pt/sociedade/noticia/alunos-portugueses-mostram-como-em-pouco-tempo-e-possivel-melhorar-diz-ocde-1614825>, accedido en 20 de enero de 2014.

1.5 - EL CURRICULO COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Como la gran mayoría de las investigaciones, en el ámbito de las Ciencias de la Educación, tiene al currículo, directa o indirectamente, por objeto de estudio, es oportuno hacer, en este capítulo, algunas consideraciones en lo relativo a las metodologías utilizadas en la investigación en Educación. Así, en este ámbito, en particular, y en la investigación sociológica, en general, hay dos principales tipos de metodologías a tener en cuenta:

- las cuantitativas, también llamadas empírico-analíticas basadas en la teoría positivista y
- las cualitativas, también, designadas constructivistas, que tienen su soporte en la teoría interpretativa.

A continuación, en las secciones siguientes, se realzan algunos aspectos relativos a cada uno de los tipos considerados.

1.5.1 - Metodologías Cuantitativas

En las metodologías cuantitativas el investigador analiza los elementos – las variables - inherentes a un problema dado, que es el tema de la investigación y, con estos elementos, establece relaciones y formula hipótesis. Después, hace la traducción numérica de los fenómenos educativos observados y, trabajando con estos datos, utilizando herramientas de la estadística, sea descriptiva sea inductiva, acepta o rechaza cada una de las hipótesis, que había formulado.

Los elementos analizados, por lo tanto, las variables, desempeñan, pues, un papel de gran importancia, por lo que es conveniente hacer algunas consideraciones relativas a ellos. En este contexto se indica que las variables son clasificadas unas como independientes, otras son denominadas dependientes y otras, también, son consideradas extrañas.

Las variables independientes son aquellas que el investigador puede controlar directamente, y esto puede ocurrir en dos modos diferentes:

- a través de la manipulación directa, como por ejemplo, el número de preguntas en una prueba,
- o por elección, como por ejemplo, seleccionar un estudiante que ha dedicado, para una prueba determinada, un cierto número de horas.

A su vez, las variables dependientes son aquellas que están influidas por los valores de las variables independientes como, por ejemplo, la calificación obtenida por el estudiante en una prueba determinada.

En el que respecta a las variables extrañas, cabe realzar que son las que no se consideran como variables independientes, pero, de alguna manera, pueden influir en los valores de las variables dependientes y, en este contexto, por ejemplo, puede referirse, como ejemplo, una indisposición temporal presentada por un estudiante en el día de una prueba.

Cabe señalar, también, que las metodologías cuantitativas pueden clasificarse en experimentales, cuasi-experimentales y en no-experimentales, dependiendo del grado de control del investigador sobre las variables extrañas más significativas. Así, se clasificará la metodología en experimental si es grande el control sobre las variables extrañas; en cuasi-experimentales si ese control es medio y en no-experimentales, si tal control es reducido.

Es de notar también, que en las metodologías cuantitativas las personas investigadas, es decir, aquellas sobre las cuales se ejerce la investigación, tienen el nombre de "sujetos".

1.5.2 - Metodologías Cualitativas

En las metodologías cualitativas el investigador describe e interpreta los fenómenos educativos, mostrando su interés en el estudio y en la interpretación de las acciones de las personas investigadas, las cuales, en este contexto, tienen el nombre de "participantes" o "informantes". Los datos recogidos son principalmente descriptivos, siendo la recogida obtenida por el investigador, a través de estrategias interactivas, tales como entrevistas, observaciones directas de los participantes y análisis de documentos.

Las metodologías cualitativas tienen varias variantes de las cuales sobresalen la fenomenológica, la etnográfica y los estudios de casos. A continuación se presentan, en términos generales, la caracterización de cada una de estas variantes.

En la metodología cualitativa fenomenológica, la preocupación fundamental del investigador es describir el significado de una experiencia según la perspectiva de aquellos que la han vivido. En este contexto, por ejemplo, para un investigador, más importante que estudiar la integración de un grupo de estudiantes con necesidades visuales, es describir las experiencias vividas por esos estudiantes en cuanto son miembros de esa escuela.

Relativamente a la metodología etnográfica hay a referir que el investigador tiene por principal objetivo describir, explicar e interpretar los fenómenos educativos que se desarrollan en una escuela en concreto, de tal manera que lo que él ve y oye es la parte más relevante de la investigación.

En lo que concierne a los estudios de casos, como variante de las metodologías cualitativas, Yin[50] los caracteriza como una descripción y un análisis detallado de unidades didácticas únicas.

[50] Referido en LATORRE, Antonio et all. (2005, p. 233).

También, en lo relativo a los estudios de casos, Merriam[51], según el informe final, los clasifica en descriptivos, interpretativos y evaluativos. Veamos cómo se caracterizan cada uno de ellos.

En los estudios de casos descriptivos, que se aplican en situaciones inherentes a los programas y estudios de prácticas innovadoras, el investigador no se guía por hipótesis previas y, al final, presenta un informe detallado sin tener preocupaciones de fundamentación teórica.

En los estudios de caso interpretativos, el investigador recoge información sobre un caso en concreto con el fin de lo interpretar y teorizar sobre él.

A su vez los estudios de caso evaluativos se utilizan, principalmente, para el estudio de programas escolares y evaluaciones educativas. En ellos el investigador debe proceder a la respectiva descripción y formular las explicaciones y juicios de valor que entendiere por adecuados.

1.5.3 - La Investigación-Acción

En el ámbito de la Educación tiene, también, mucho interés, una metodología intitulada investigación-acción consistiendo de una investigación sistemática de una dada situación con el objetivo de mejorar y/o a comprender tal situación. En cada uno de los pasos de esta investigación sistemática se utiliza la metodología más adecuada para el efecto, la cual, por si misma, se puede, naturalmente, clasificar de acuerdo con los criterios descritos en las secciones anteriores.

En la metodología de investigación-acción dos líneas tipológicas deben considerarse: una basada en el modelo lewiniano y otra en la escuela inglesa[52].

---

[51] Idem (2005, p. 236).
[52] Ibídem (2005, p. 278)

En el modelo lewiniano la investigación sistemática es hecha por ciclos (planificación – acción – evaluación) y contempla cuatro modalidades de investigación-acción: diagnóstica, participativa, empírica y experimental.

De forma sintética, la caracterización de cada una de las cuatro modalidades se indica a continuación.

- En la investigación-acción diagnóstica hay una recogida de datos, se sigue su interpretación, es establecido un diagnóstico y son recomendadas medidas de acción.

- En la investigación-acción participativa hay una implicación de los miembros de la comunidad en el proyecto de investigación, siendo éstos, incluso, considerados agentes del proceso de investigación.

- En la investigación-acción empírica se estudia un problema social y, a través de una acción que supone un cambio, se valoran las respectivas consecuencias.

- La investigación-acción experimental es idéntica a la anterior con la diferencia de que inicialmente se efectúa un diseño experimental o cuasi experimental.

En lo que respecta a la segunda línea, dirigida esencialmente para hacer más eficaz la práctica educativa y perfeccionamiento del profesor, hay tres modalidades de investigación-acción a tenerse en cuenta: técnica, práctica y crítica.

- En la investigación-acción técnica los profesores participan en programas diseñados por expertos.

- En la investigación-acción práctica los profesores tienen un protagonismo activo y autónomo siendo ellos quienes seleccionan los problemas de investigación y conducen el control del proyecto, eventualmente con el auxilio de expertos o de otros colegas con más experiencia.

- En la investigación-acción crítica, o emancipadora, los profesores van más por delante de la acción pedagógica, interviniendo en la transformación del propio sistema.

1.5.4 - La Presente Tesis

Relacionando con la presente Tesis, según lo que atrás fue mencionado, se ha de evidenciar que en ella – que culmina con la presentación de Conclusiones y con una Propuesta de Currículo para una asignatura de Matemática que va a ser leccionada en los cursos de la APEDV – fue utilizada una metodología cualitativa, en la modalidad de estudio de caso, cuya clasificación, tal como se puede deducir de lo que antes fue descrito, depende de un autor a otro.

Así, por ejemplo, según Merriam, se trataría de un estudio de caso descriptivo porque, en opinión de este autor, es en este contexto en el que se adaptan los programas y estudios de prácticas innovadoras tal como antes fue indicado.

A su vez, a modo también de ejemplo, el presente estudio de caso, según Stake[53], sería clasificado como intrínseco, porque la investigación se centró en una entidad específica y dirigida única y exclusivamente a la introducción de mejoras en esta entidad.

[53] Referido por MEIRINHOS, Manuel & OSÓRIO, António (2010).

2 - EL SISTEMA BRAILLE

"Si los ojos no me sirven para aprender de hombres, acontecimientos, ideas y doctrinas, tengo que encontrar otro medio".

Luís Braille

2.1 - INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la opinión de psicólogos especialistas, en lo que respeta a las personas normovisuales, es decir, aquellas que ven normalmente aunque para ello necesiten usar gafas, cerca de 80% de la información que el cerebro recibe proviene del sistema visual[54]. Este hecho evidencia la situación de enorme desventaja en que se encuentran las personas con necesidades visuales especiales, en particular las invidentes, con respecto a sus conciudadanos.

Si tenemos en cuenta que, hoy en día, para cualquier persona, bien bajo el punto de vista social, cultural, profesional, es vital el acceso a la información; fácilmente se comprende la extraordinaria contribución que Louís Braille proporcionó a la humanidad al presentar, en 1837, el sistema táctil de lectura/escritura, que iba a constituir la primera gran revolución en el acceso a la información por parte de las personas ciegas

En términos históricos debe de destacarse que el terreno donde Louis Braille desarrolló sus ideas fue, previamente, preparado por las extraordinarias contribuciones de:

- Valentin de Hauy (1745-1822), al crear en París, en 1786, el Instituto Real de Jóvenes Ciegos (IRJC) cuya existencia fue consignada, en 1791, en un decreto de la Asamblea Constituyente Francesa;

- y de Nicolas Marie Charles Barlier de La Serre (1767-1841), oficial de artillería, al concebir un sistema de lectura táctil de mensajes, designado

[54] GUERREIRO (2000, p. 44).

inicialmente como **sistema de escritura nocturna**, y, más tarde, **sistema de sonografía de Barbier**[55]. Este sistema, tenía por base una matriz de doce puntos, distribuidos por 6 líneas y 2 columnas y se destinaba a la codificación de los 36 principales sonidos existentes en la lengua francesa.

La presentación, por el propio Barbier de la Serre, de su sistema de escritura nocturna en el referido IRJC, en 1821, donde Louis Braille era alumno, en aquellas fechas con 12 años de edad, dio a este el punto necesario para concebir el sistema de lectura/escrita para invidentes que, hoy día, es mundialmente conocido por Sistema Braille.

Louis Braille se dio cuenta rápidamente de la gran ventaja de un sistema de lectura táctil de puntos en relieve. Sin embargo, constató que una matriz de 12 puntos no era lo más adecuado a la yema táctil de los dedos. Así, concibió un sistema basado en una matriz de seis puntos distribuidos por 3 líneas y dos columnas, presentando la primera versión en 1829 y, ocho años después, luego de varios perfeccionamientos, la versión definitiva.

Cerca de medio siglo más tarde, en congreso internacional[56] realizado en París, en 1878, con la participación de once países europeos y de Estados Unidos, se confirmó la consagración definitiva de Louís Braille, atribuyendo a su nombre el sistema que él creó y quedando establecido que el sistema Braille, en el ámbito de la literatura, debería de ser utilizado como padrón.

Las virtualidades del Sistema Braille son evidenciadas en incontables documentos. A título de ejemplo refiero los dos siguientes:

- el Sistema Braille es único medio “natural” y “universal ” indispensable para que las personas ciegas puedan desarrollar, intensivamente,

[55] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 52).
[56] GOVERNO FEDERAL DO BRASIL (2008).

hábitos de lectura estables, como lo reconocen la UNESCO[57] y el IFLA[58] en documento conjunto[59], publicado en 1998;

- el Sistema Braille es de extraordinaria importancia para el refuerzo de la identidad personal, de la autoestima, de la autonomía y de la integración social de las personas ciegos, conforme consta en las conclusiones del Congreso Ibero-americano del Braille, realizado en 1999, en Buenos Aires[60].

[57] United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.
[58] International Federation of Library Associations.
[59] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 58) citando REINO, Vítor (2000).
[60] Ídem.

2.2 - LAS SEÑALES SIMPLES

Louís Braille, como elemento fundamental del sistema táctil de lectura/escrita que concibió, definió una matriz de 6 puntos, distribuidos por 3 líneas y 2 columnas, como ya queda indicado.

Luís Braille, como elemento fundamental del sistema táctil de lectura/escrita que concibió, definió una matriz de 6 puntos, distribuidos por 3 líneas y 2 columnas, como ya fue referido. Tales puntos, que en su conjunto constituyen la señal fundamental, están numerados de 1 a 6, leyendo de arriba para abajo y de la izquierda a la derecha, tal como se evidencia en la figura siguiente.

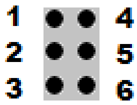


Figura 2.2-01: La señal fundamental

El espacio ocupado por la señal fundamental se designa de célula braille. En esta, según Barry Hempshire[61], de acuerdo con estudios experimentales que fueron efectuados con miras a la obtención de una adecuada percepción táctil, se debe de prestar atención a lo siguiente:

- cada punto en relieve deberá tener entre 1 mm y 1,52 mm de diámetro en la base y 0,43 mm de altura;

- los puntos en relieve situados en dos filas consecutivas, bien en la horizontal, bien en la vertical, y deberán estar a una distancia de 2,29 mm

- la distancia entre células (primeras columnas) deberá ser de 3,12 mm;

- la distancia entre líneas deberá ser de 5,59 mm.

[61] GUERREIRO (2000, p. 200) referindo HAMPSHIRE, Barry (1980).

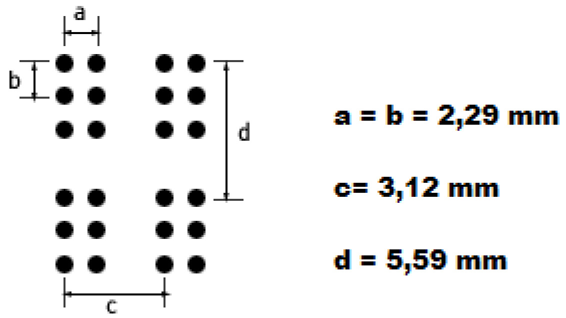


Figura 2.2-02: Dimensiones recomendables de las células braille para una eficaz lectura táctil.

Una pregunta se formula, ahora: ¿de cuántos modos diferentes pueden los puntos en relieve distribuirse por la señal fundamental?

Como la señal fundamental contempla 6 puntos y cada uno de estos puede, o no, estar en relieve, entonces el número de configuraciones distintas es $2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6 = 64$.

Cada una de las 64 configuraciones se corresponde con una señal braille diferente. Una de ellas, contemplando la inexistencia de cualquier punto en relieve, se relaciona, naturalmente, con el espacio en blanco.

Las 63 configuraciones que tienen, por lo menos, un punto en relieve se distribuyen por siete subconjuntos que se designan como series.

La 1ª serie, que se designa usualmente **serie fundamental**, está constituada por 10 configuraciones distintas, como se evidencia:

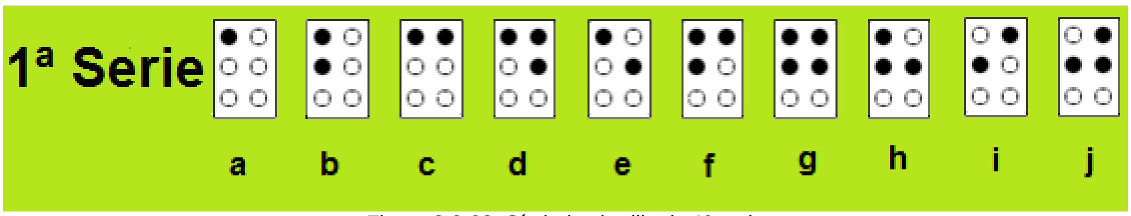


Figura 2.2-03: Símbolos braille da 1ª serie

Los elementos de esta serie se caracterizan por no tener puntos en relieve en la 3ª línea y tener, por lo menos, un punto en relieve bien en la 1ª línea y en la 1ª columna.

Por el hecho de no haber puntos en relieve en la 3ª línea esta serie tiene, también, la denominación de **serie superior**.

La designación de serie fundamental para la 1ª serie, resulta del hecho de que sus símbolos sean utilizados como base para la definición de los símbolos de las 2ª, 3ª y 4ª series y como modelos para los símbolos de la 5ª serie.

Analícense, ahora, los símbolos de la 2ª serie. Son, también, en número de diez, tal como la figura siguiente evidencia, y se obtienen a partir de los símbolos de la 1ª serie colocándose en relieve, también, el punto 3.

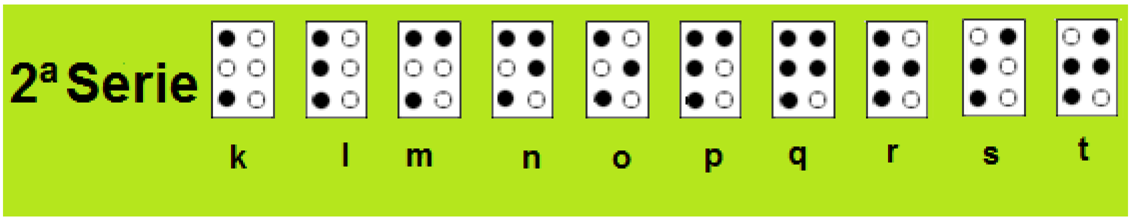


Figura 2.2-04: Símbolos braille da 2ª serie

En el que respeta a los símbolos de la 3ª serie se constata que se obtienen, también, a partir de los de la 1ª serie poniendo en relieve los puntos 3 y 6

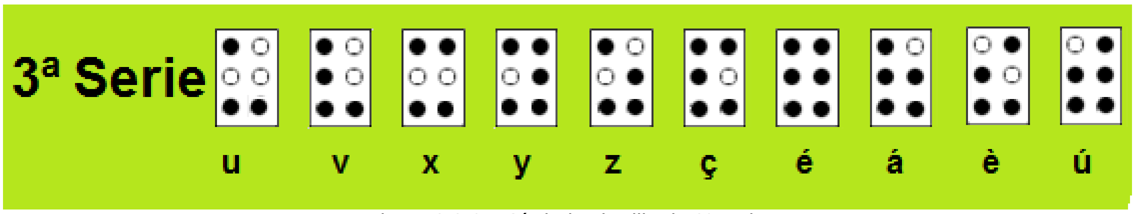


Figura 2.2-05: Símbolos braille da 3ª serie

Tal como ya fue destacado, los símbolos de la 4ª serie se obtienen, también, a partir de los de la 1ª serie poniendo, después, en relieve el punto 6.

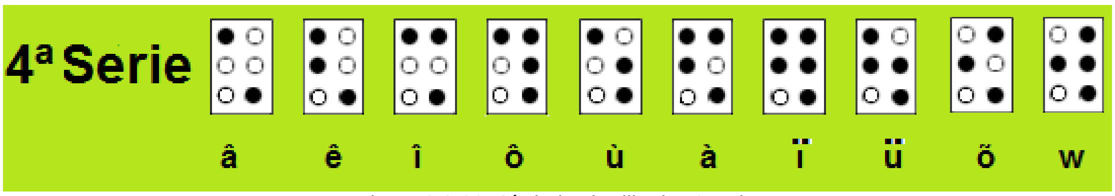


Figura 2.2-06: Símbolos braille da 4ª serie

En el que respeta a la 5ª serie sus símbolos se obtienen a partir de los de la 1ª serie, desplazando una posición, en el sentido descendiente, los puntos en relieve. Asi, tal serie tiene el siguiente aspecto.

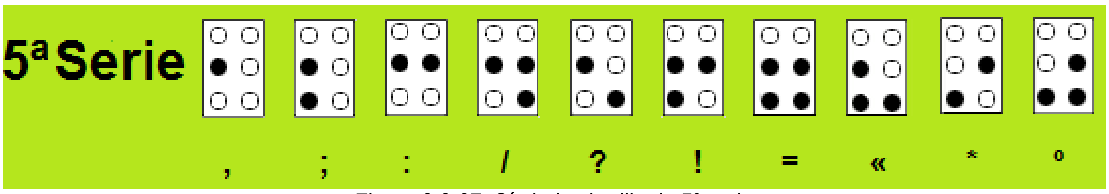


Figura 2.2-07: Símbolos braille da 5ª serie

Como en la 1ª línea de cualquiera una de estas configuraciones no hay puntos en relieve entonces esta serie tiene también la denominación de **serie inferior**.

Las 6ª y 7ª series, que a continuación se realzan, no tienen ninguna relación con la 1ª serie y, tampoco, no tienen cualquier relación entre sí.

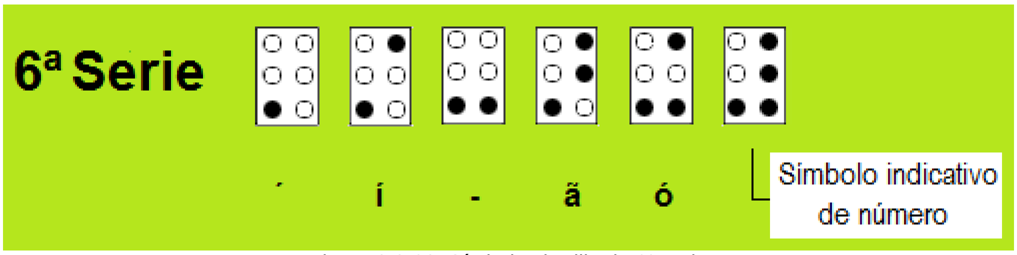


Figura 2.2-08: Símbolos braille da 6ª serie

Las configuraciones de esta serie se caracterizan por tener el punto 3 en relieve y, cuando el punto 5 se presenta en relieve, también, lo está el punto 4. Nótese, sin embargo, de que el punto 4 esté en relieve, no exige que el punto 5 lo esté.

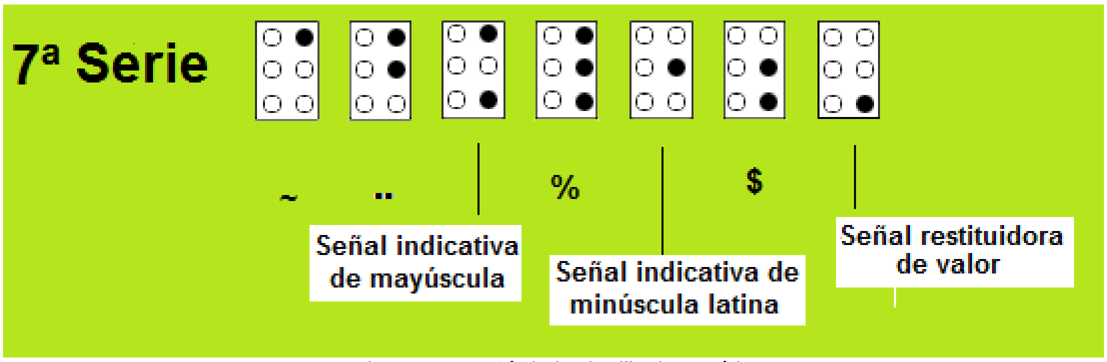


Figura 2.2-09: Símbolos braille da 7ª série

Los símbolos de la 7ª serie se caracterizan porque, en la 1ª columna, no tengan ningún punto en relieve.

Las 63 señales braille que fueron definidos se denominan señales simples. Cada una de ellas admite una traducción numérica, la cual consiste en una secuencia de dígitos realzando cuáles los puntos en relieve que definen esa señal. Así, por ejemplo, para la señal braille correspondiente a la letra “a” (1er. símbolo de la 1ª serie) su traducción numérica es 1. Por su parte, a título de ejemplo, para la señal braille correspondiente a la letra “w” (último símbolo de la 4ª serie) su traducción numérica[62]es 2456.

Es de destacar que, en función de la posición de los puntos en relieve, hay señales braille que tienen denominaciones especiales[63] . Así, una señal se dice

- de la fila derecha si en su constitución no interviene ninguno de los puntos 1, 2, o 3;

- de la fila izquierda si en su formación no ocurran ninguno de los puntos 4, 5, o 6;

- superior si su definición no contempla los puntos 3 y 6 y simultáneamente
  esté en relieve, por lo menos, uno de los puntos 1 o 4;

- inferior si ninguno de los puntos 1 y 4 está en relieve.

[62] La secuencia numérica 2456 era utilizada, hasta 1973, para representar bien el símbolo alfabético “ò” bien el simbolo “w”. A partir de ese año tal secuencia sólo representa el símbolo “w”.
[63] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 61).

2.3 - GRAFIA MATEMÁTICA DEL BRAILLE

Utilizándose, solamente, señales simples, el sistema braille quedaría muy limitado. Así, para resolver esta dificultad, se concibieron señales braille compuestas cada una de ellas teniendo en cuenta una combinación de dos o más señales braille simples.

En el ámbito de este subcapítulo va a dar particular realce a los principales símbolos de la grafía Braille para la Matemática. A este propósito debe de destacarse que en Portugal, en una primera fase, más concretamente en los años 20 del siglo pasado, la grafía braille para la matemática se basaba en la grafía francesa. Inicialmente fue adoptado un código matemático provisional que, en 1967, pasó a definitivo, después de los ajustes entendidos por convenientes. Más tarde, en 1994, fue adoptado por la Comisión de Braille[64] un código matemático unificado que, en 1987, en Montevideo, había sido aprobado para los países de lengua castellana[65].

2.3.1 - Representación de las letras mayúsculas

La codificación en Braille de las letras mayúsculas se obtiene juntando la señal braille cuya traducción numérica es (46) (6º símbolo de la 6ª serie) a la señal braille de la correspondiente letra minúscula. Por ejemplo, para la letra "A" se habrá

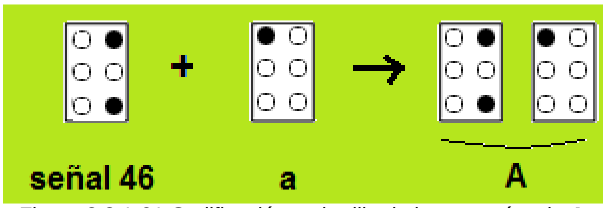


Figura 2.3.1-01:Codificación en braille da letra mayúscula **A**

Para escribirse una palabra sólo con letras mayúsculas, por ejemplo, la palabra "AMOR" hay dos procesos:

---

[64] Entidad que, en la ocasión era responsable, en Portugal, de las cuestiones relacionadas con las diversas Grafias Braille.
[65] Este código esta descrito de forma muy detallada en BARCA, Juan José Della (s/d) y, también, en OROSCO, Alejandro (2004).

1º) doblar, en el inicio, la señal 46 seguida de las señales de las letras minúsculas correspondientes

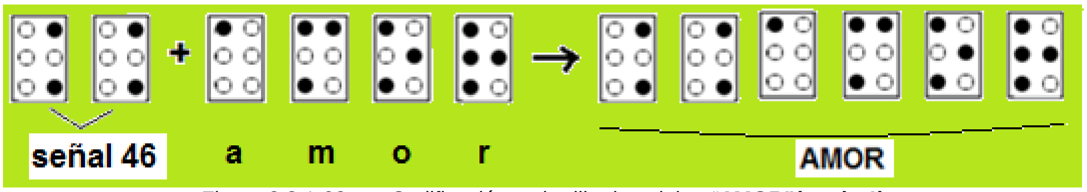


Figura 2.3.1-02: Codificación en braille da palabra “**AMOR”(modo 1)**

2º) colocar la señal (46) atrás de cada uno de las señales braille relativas a las letras “a”, “m”, “o” y “r”.

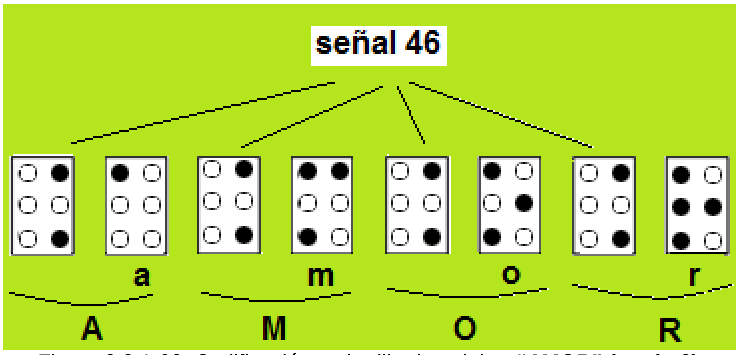


Figura 2.3.1-03: Codificación en braille da palabra **“AMOR” (modo 2)**

Nótese que en el ejemplo relativo al 1er. proceso, si no se duplicara la señal (46), en vez de la palabra “AMOR” se tendría “Amor”, pues sólo la primera letra sería mayúscula.

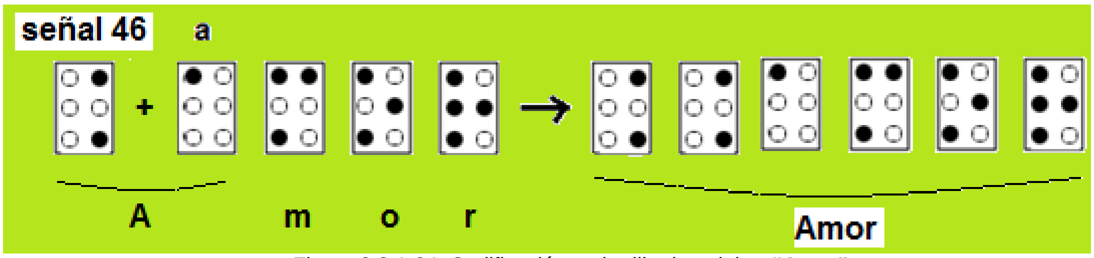


Figura 2.3.1-04: Codificación en braille da palabra **“Amor”**

2.3.2 - Representación de los números enteros

Las representaciones de los guarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0 se obtienen precediendo de la señal braille (3456) la señal correspondiente a las letras a, b, c, d, y, f, g, h, i, j, respectivamente. A título de ejemplo se presenta la codificación del guarismo “3”.

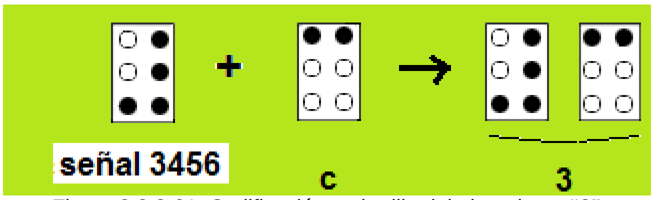


Figura 2.3.2-01: Codificación en braille del alguarismo **"3"**

En la representación de un número entero sólo el primer guarismo viene procedido del símbolo (3456), tal como se muestra:

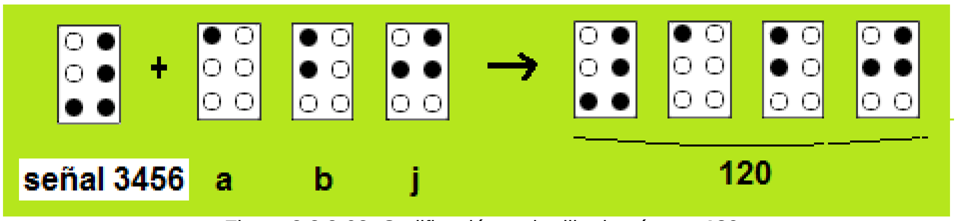


Figura 2.3.2-02: Codificación en braille do número **120**

La representación de un número entero negativo se hace anteponiendo el símbolo (36) al símbolo de número (3456).

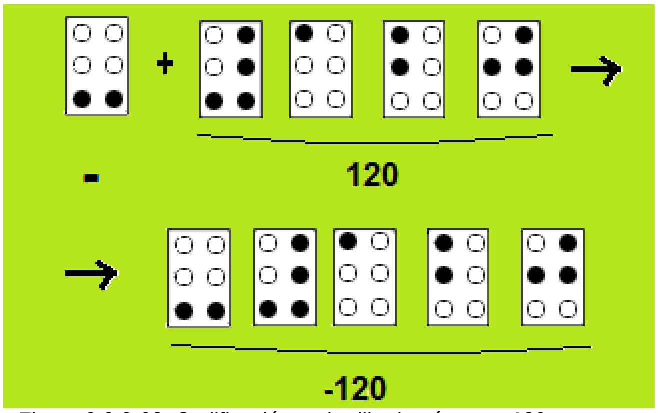


Figura 2.3.2-03: Codificación en braille do número **- 120**

2.3.3 - Representación de los números fraccionarios

La representación de un número fraccionario se hace indicando inicialmente cuál es el número que consta del numerador, después se representa el trazo de fracción a través de la señal compuesta cuya traducción numérica es (5, 256) y, finalmente, se expresa el valor del denominador. Nótese que la representación (5, 256) evidencia que la señal compuesta es la resultante de dos señales simples: (5) y (256).

Para se evidenciar la representación de una fracción, considérese, a título de ejemplo, $\frac{12}{18}$. Su representación tiene traducción en la secuencia numérica (3456, 1, 12; 5, 256; 3456, 1, 125), tal como se muestra en la figura siguiente. Nótese, sin embargo, que en esta secuencia, los puntos y comas separan dos símbolos braille consecutivos.

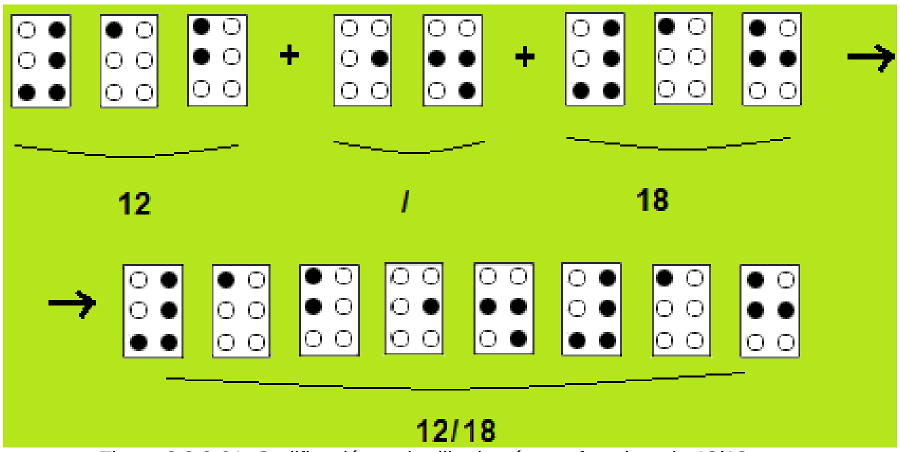


Figura 2.3.3-01: Codificación en braille do número fraccionario **12/18**

Para las fracciones de denominador 100, usualmente designadas porcentajes, se utiliza la secuencia (456, 356), como símbolo de porcentaje. Así, por ejemplo para 20 por ciento (20%) la secuencia numérica que lo representa es (3456, 12, 245; 456, 356).

En cuanto a la representación decimal de los números fraccionarios proporcionan una representación finita o infinita, pero, periódica. Por ejemplo 1/2=0,5 tiene una décima finita, mientras en 1/3=0,3333… y en 5/6=0,83333… la décima es infinita, pero periódica, pudiendo evidenciarse el periodo escribiéndolo entre paréntesis. Así, 1/3=0,(3), realza una décima periódica simple, mientras que en 11/6=1,8(3) la décima es periódica mixta, dado que hay un anteperiodo.

En el sistema braille, cuando la décima es finita, se utiliza una coma que separa la parte entera de la parte decimal. Siendo la señal braille correspondiente a la coma representada numéricamente por (2) entonces la codificación de 0,5 tiene el siguiente aspecto

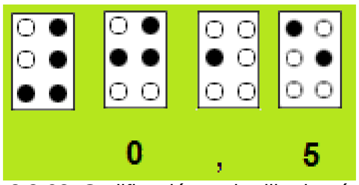


Figura 2.3.3-02: Codificación en braille do número **0,5**

Cuando la décima es infinita se utiliza una otra coma para indicar que va a iniciarse el periodo. A la secuencia de guarismos comprendidos entre el guarismo más a la derecha de la parte entera y el guarismo más a la izquierda de la primera ocurrencia del periodo, se da la denominación de anteperíodo. En el sistema braille las dos comas delimitan, pues, el anteperíodo.

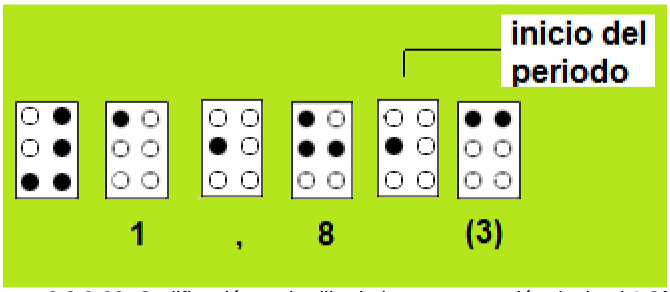


Figura 2.3.3-03: Codificación en braille de la representación decimal **1,8(3)**

En la figura anterior el periodo contempla el guarismo 3 mientras que el ante período está constituido por el guarismo 8. Naturalmente que, cuando se está ante una décima periódica simple, dado que no hay anteperíodo, las dos señales braille correspondientes a la dos comas se colocan una a continuación de otra.

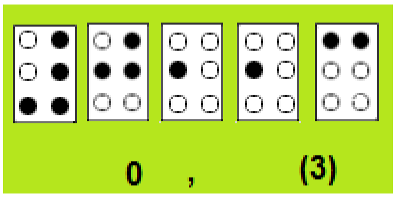


Figura 2.3.3-04: Codificación en braille de la representación decimal 0, (3)

2.3.4 - Representación de los números ordinales

Para la representación de los números ordinales se utilizan los símbolos de la 5ª serie, precedidos por la señal indicativa de número (3456) y, como referencia para indicador ordinal masculino (º) e indicador ordinal femenino (ª), se utilizan las secuencias numéricas (456, 135) y (456, 1), respectivamente.

Así, por ejemplo, para designar centésimo, 100º, se utiliza la secuencia numérica (3456, 2, 356, 356; 456, 135).

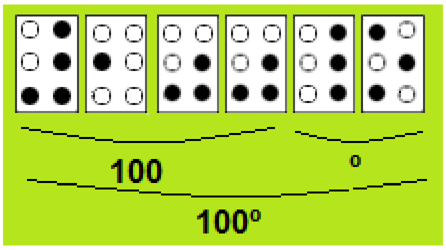


Figura 2.3.4-01: Codificación en braille de 100º

2.3.5 - Representación de los conjuntos numéricos

En la escritura a tinta, para designar los conjuntos numéricos especiales tales como lo de los números naturales, de los números enteros relativos, de los números racionales relativos, de los números reales y de los números complejos se utilizan las letras mayúsculas N, Z, Q, R y C, respectivamente, pero con un formato de letra muy especial, la “castellar”, u otra equivalente, que les proporciona el aspecto siguiente: N, Z, Q, R, C.

En el sistema braille la designación de los conjuntos referidos se hace anteponiendo el símbolo (456) a la letra que representa el conjunto. Así, por ejemplo, para el conjunto de los números naturales se tiene la secuencia numérica (456, 1345). En la figura siguiente se evidencian las codificaciones de los cinco conjuntos referidos.

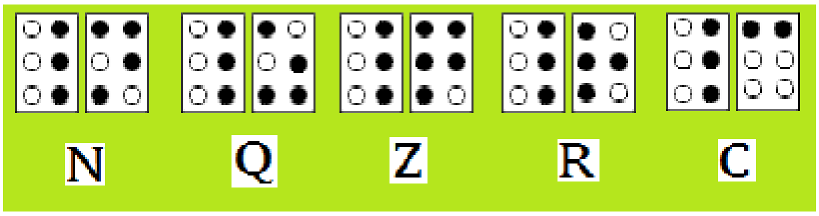


Figura 2.3.5-01: Codificación en braille de los conjuntos de números naturales enteros relativos, racionales relativos, reales y complejos

Para las operaciones de intersección (∩) y de reunión (U) de conjuntos se utilizan los símbolos braille (456, 156) y (456, 356), respectivamente.

2.3.6 - Representación de operaciones aritméticas

Las señales de suma, sustracción, multiplicación y división son codificadas, respectivamente, por (235), (36), (236) y (256). Así, por ejemplo, para representarse 12:18 (12 dividido por 18), se tiene la codificación braille que numéricamente se traduce por (3456, 1, 12; 256; 3456, 1, 125).

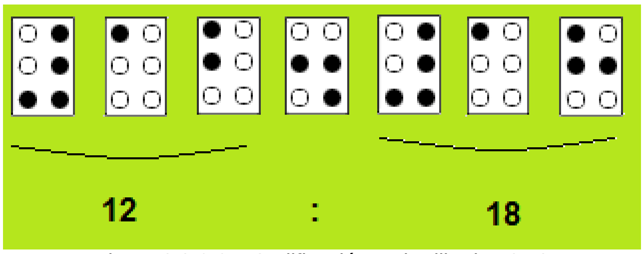


Figura 2.3.6-01: Codificación en braille de 12:18

Nótese que en cada secuencia numérica

- hay un par de paréntesis curvos para encuadralas;
- el punto y coma son utilizados para separar un símbolo braille de otro, bien sean simple o compuesto;
- en los símbolos compuestos es utilizada la coma para separar dos combinaciones numéricas referentes a células consecutivas que integran la misma señal compuesta.

Más allá de las operaciones aritméticas elementales, voy a considerar las operaciones **factorial** y **potenciación**. Recuérdese que el factorial de un número natural n, se representa por n! y dice respecto al producto n×(n-1) ×…×3×2×1. Así, por ejemplo, 5!=5×4×3×2×1=120. En el sistema braille la operación factorial está codificada a través del símbolo compuesto **(45, 3**). La figura siguiente muestra la representación de 5!.

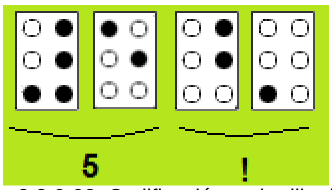


Figura 2.3.6-02: Codificación en braille de **5!**

Dado que la señal = es representada por la secuencia numérica **(2356)** entonces la igualdad **5!=120** es codificado por la secuencia (3456,14; 45,3; 2356; 3456, 1, 12, 245) que, en caracteres braille, tiene el aspecto siguiente:

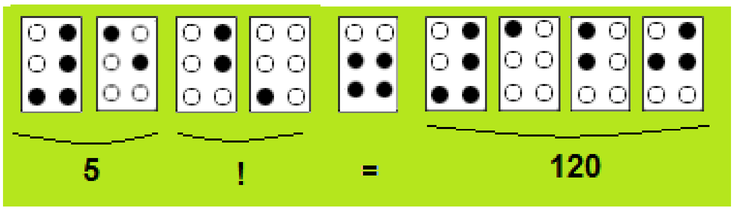


Figura 2.3.6-03: Codificación en braille de **5!=120**

Para la potenciación, la indicación del exponente se hace a través del símbolo (16). Así, por ejemplo, en caracteres braille, la igualdad 5^2=25, está codificada por la secuencia (3456, 15; 16; 3456, 12; 2356; 3456,12, 15).

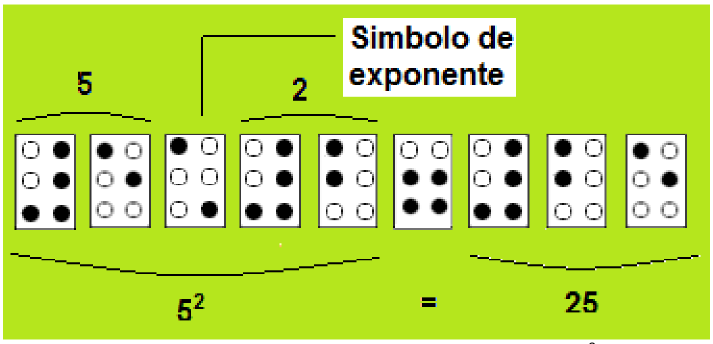


Figura 2.3.6-04: Codificación en braille de 5^2=25

2.3.7 - Representaciones en el ámbito del cálculo algebraico

En una expresión algebraica, para representar, por ejemplo, el monomio 12ab, se coloca la señal (5), correspondiente la letra latina minúscula, entre el coeficiente del monomio y su parte literal, tal como se muestra en la figura.

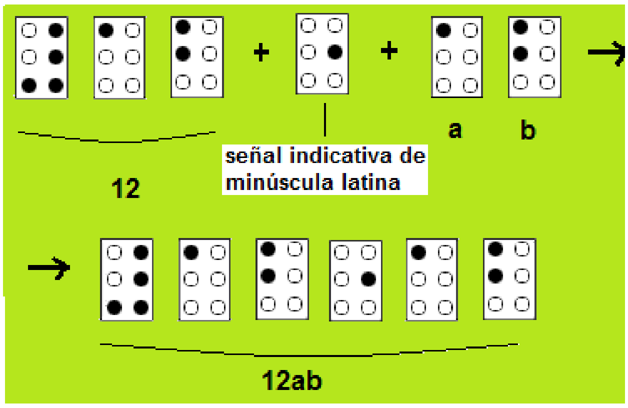


Figura 2.3.7-01: Codificación en braille do monomio 12ab

Nótese que en la representación anterior, con la supresión de la señal indicativa de letra minúscula latina, se tendría el número 1212.

Una suma algebraica de monomios constituye un polinomio. La codificación en braille de, por ejemplo, el polinomio $3a^2 + 2ab – b^2$ se traduce numéricamente por la secuencia (3456,14; 5,1;16;12; 235; 3456,12; 5,1;12; 56; 3456,1; 5,12; 16;3456,12).

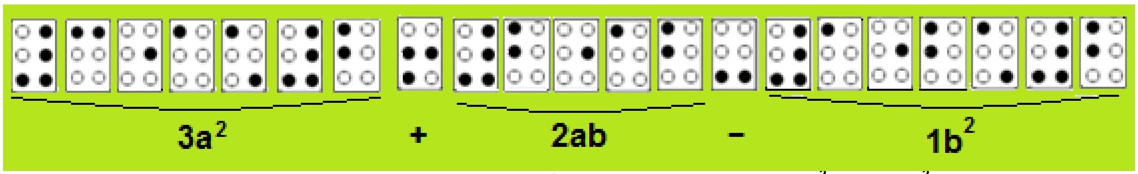


Figura 2.3.7-02: Codificación en braille do polinomio $\mathbf{3a^2 + 2ab – b^2}$

En el que se refiere la ecuaciones algebraicas, considérese, a título de ejemplo la ecuación del 2º grado $x^2 + 4x = 2x + 3$. Su codificación en el sistema braille es interpretada por la secuencia numérica (1346; 16; 3456, 12; 235; 3456, 145; 5, 1346; 2356; 3456, 12; 5, 1346; 235; 3456, 13).

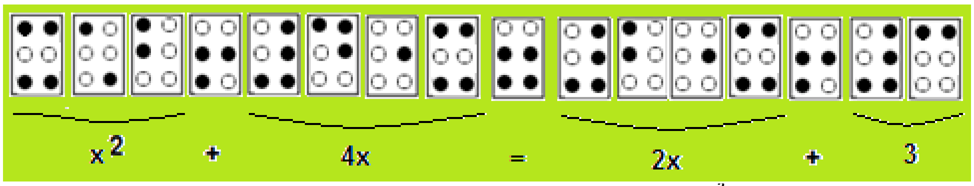


Figura 2.3.7-03: Codificación en braille da ecuación $\mathbf{x^2 + 4x = 2x + 3}$

También a titulo de ejemplo, y para las inecuaciones, considerese $x > \sqrt{3}$. En el sistema braille su representación es la secuencia numérica (1346; 135; 1246, 156; 3456, 14).

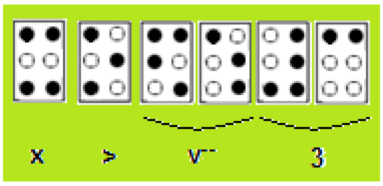


Figura 2.3.7-04: Codificación en braille da expresión $\mathbf{x>\sqrt{3}}$

2.3.8 - Representación de operaciones transcendentes

Para la señal de límite se utiliza el símbolo compuesto (24, 2). De este modo la representación de, por ejemplo, $x \to 3$ es (1346; 24, 2; 3456, 14).

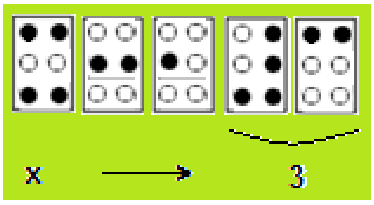


Figura 2.3.8-01: Codificación en braille de la expresión **x→3**

A su vez, para la expresión "log 20", logaritmo de 20, se representa codificando las letras "l", "o", "g", siguiéndose la señal sólo con el punto 3, y después la codificación del número 20. En términos numéricos se tiene (123; 135; 1245; 3; 3456, 12, 245).

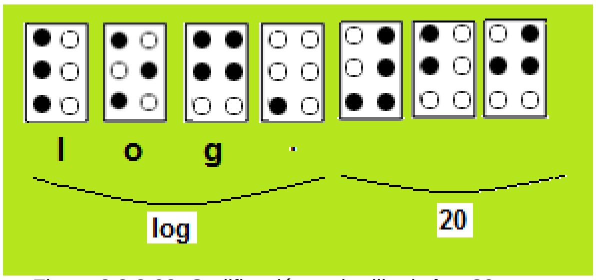


Figura 2.3.8-02: Codificación en braille de **log 20**

Para las funciones seno, coseno, tangente, cosecante, secante cotangente codificase, inicialmente, seno, cos, tg, cosec, sec y cotg, respectivamente, se sigue símbolo sólo con el punto 3 y después el ángulo sobre el cual la función incide. Así, por ejemplo, para sen π (seno de π) se utilizaría la secuencia numérica (234; 15; 1345; 3; 456, 4, 1234) mientras, para sen pi (seno de pi), se utilizaría la secuencia (234;15; 1345; 3; 1234, 24)[66].

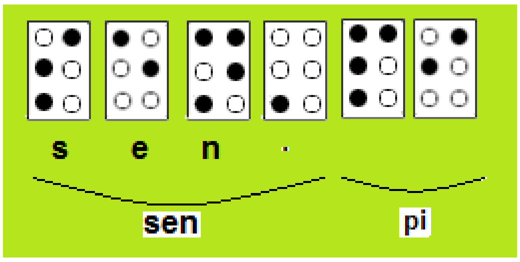


Figura 2.3.8-03. Codificación en braille de **seno de pi**

[66] La codificación, en braille, de **π** es (456, 4, 1234) mientras la codificación de **pi** es (1234, 24).

2.3.9 - Representaciones en el ámbito de la geometría

En el Sistema Braille la codificación de una recta se hace precediendo la designación de la recta (usualmente una letra latina minúscula) por el símbolo compuesto (5, 25, 2) que significa flecha con doble sentido. Así, por ejemplo, la designación de una recta r se hace por la secuencia (5, 25, 2; 1235)

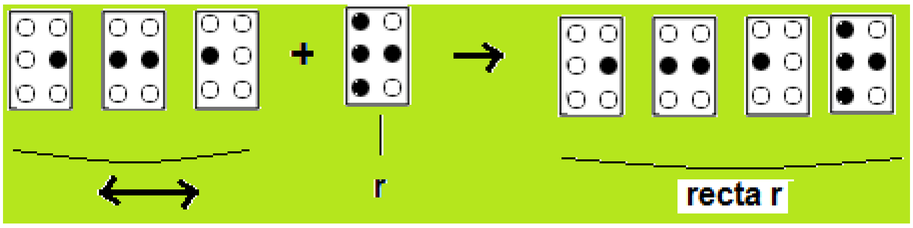


Figura 2.3.9-01: Codificación en braille de “recta r”

Para se referir rectas paralelas se utiliza el símbolo compuesto (456, 123). Así, la secuencia (5, 12, 2; 1235; 456, 123; 5,12, 2; 234) indica que la recta r es paralela a la recta s.

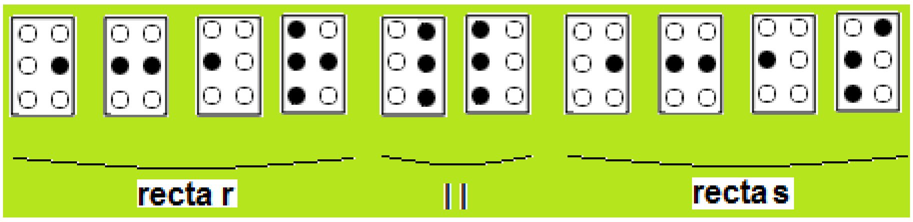


Figura 2.3.9-02: Codificación en braille de “recta r paralela à recta s”

Para se indicar que una recta es perpendicular a una otra se utiliza el símbolo compuesto (3456, 3). De este modo la secuencia (5, 12, 2; 1235; 3456, 3; 5,12, 2; 234) indica que la recta r es perpendicular a la recta s.

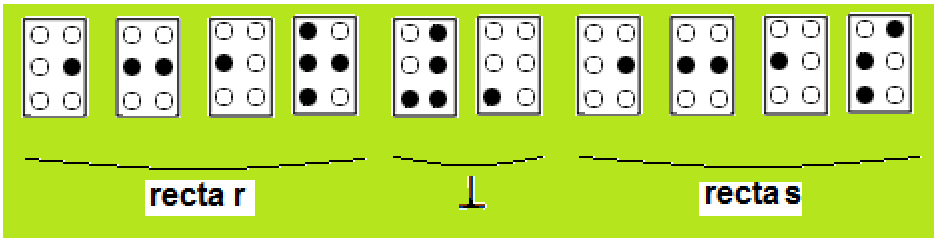


Figura 2.3.9-03: Codificación en braille en braille de “recta r perpendicular à recta s”

La codificación de una semirrecta OA se hace precediendo la codificación de las letras “O” y “A” por el símbolo compuesto (25, 2) que significa flecha. Con miras a enfatizar que la flecha se aplica a la dos letras, éstas deben estar encuadradas por los paréntesis auxiliares "("y")" que en braille tienen las codificaciones (26) y (36), respectivamente.

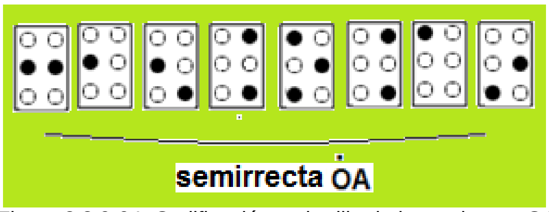


Figura 2.3.9-04: Codificación en braille de la semirrecta OA

Nótese que el símbolo compuesto (25, 2) también es utilizado para la representación de un vector. Así, por ejemplo, el vector $\vec{v}$ tiene la representación (25,2; 1236).

La representación usual de un segmento de recta de extremos A y B se hace colocando entre paréntesis rectos las dos letras, resultando, entonces, [A, B]. A su vez, para la longitud de este segmento, se utiliza el subrayado superior en cada una de las letras, de aquí el resultado es $\overline{AB}$. En el sistema braille la representación, bien de un segmento de recta de extremos A y B, o de su longitud, se hace anteponiendo el símbolo compuesto (4, 14), que significa subrayado superior, a la codificación de las letras "A" y "B" que son (46, 1) y (46, 12), respectivamente. Además de eso, tal como para la situación anterior, se utilizan los paréntesis auxiliares.

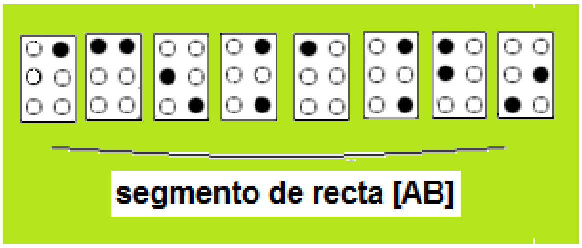


Figura 2.3.9-05: Codificación en braille del segmento de recta [AB].

En la grafía matemática del braille, en lo que respecta a los polígonos, se da particular importancia al triángulo, para el cual se utilizada el símbolo compuesto (6, 23456), al cuadrado, que tiene el símbolo braille (456, 13456), y al rectángulo cuyo símbolo braille es (12346, 13456).

Nótese que los puntos en relieve dan, para las situaciones atrás descritas, la idea de un triángulo, un cuadrado y un rectángulo, respectivamente como se evidencia en la figura siguiente.

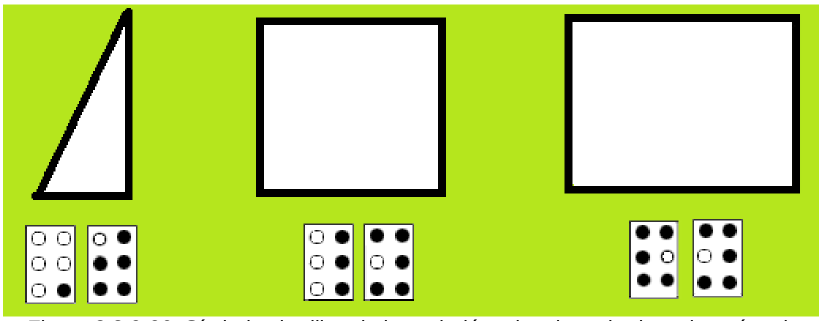


Figura 2.3.9-06: Símbolos braille relativos al triángulo, al cuadrado y al rectángulo

Para un polígono, en general, la designación se obtiene anteponiendo a la secuencia de letras, inherentes a sus vértices, el símbolo compuesto (12346, 135). Por ejemplo, para el polígono [A B C D Y] se tendría el símbolo compuesto (12346, 135; 46, 46; 1; 12; 14; 145; 15).

En la representación de una circunferencia se utiliza la señal compuesta (246, 135) que es la combinación que mejor se adecua a esta figura geométrica.

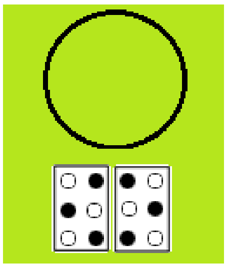


Figura 2.3.9-07: Símbolo braille relativamente a la circunferencia

2.3.10 - Representaciones en el ámbito de la lógica

Para las operaciones lógicas de conjunción (v), disyunción (∧) y negación (~) son utilizados, respectivamente, los símbolos compuestos (45,1), (45,2) y (45,3). Así, por ejemplo, la expresión “~ p v q” es representada por la secuencia numérica (45,3; 1234; 45,2; 12345).

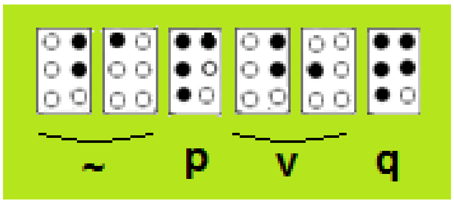


Figura 2.3.10-01: Codificación en braille de la expresión “no p o q”.

2.4 - EL BRAILLE DE OCHO PUNTOS

Con el advenimiento de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación hubo necesidad de adaptar el sistema braille a esta nueva realidad, por lo que, en paralelo con el sistema braille con su señal fundamental de 6 puntos, se creó una nueva señal fundamental, con 8 puntos, posibilitando, así, doscientas y cincuenta y seis (2^8 =256) señales simples. Este hecho permitió el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre las señales simples del braille de 8 puntos y la tabla del código ASCII[67].

La nueva señal fundamental de 8 puntos se obtuvo añadiendo a la señal fundamental de 6 puntos una nueva línea con los nuevos puntos numerados por 7 y 8, de la izquierda para la derecha, respectivamente, manteniendo los otros 6 puntos la misma numeración que tienen en la señal fundamental de 6 puntos.

Es interesante notar que una célula de 8 puntos, distribuidos por 4 líneas y dos columnas, fue utilizada por primera vez por Gabriel Abreu Castaño[68] (1834-1881) cuando tenía 20 años de edad. Tal ocurrió en el ámbito de la concepción de un sistema de enseñanza de la música, alternativo al sistema braille[69], teniendo la señal fundamental de Gabriel Abreu una numeración diferente de la que existe actualmente, pues numeró los dos puntos de la 1ª línea como 1 y 2, de la izquierda a la derecha, respectivamente, después los de la segunda línea como 3 y 4, los de la tercera como 5 y 6 y, finalmente, los de la cuarta, y última línea, como 7 y 8.

En la figura siguiente se evidencian las dos señales fundamentales de 8 puntos, el de Gabriel Abreu y el del braille informatizado.

---

[67] American Standard Code for Information Interchange con 256 símbolos ampliamente utilizado por los equipamientos informáticos
[68] Nacido en Madrid y ciego con pocos meses de edad debido a un resfriado. BURGOS BORDONAU, Esther (2004, pp. 113-134).
[69] BURGOS BORDONAU, Esther (2004, pp. 113-134).

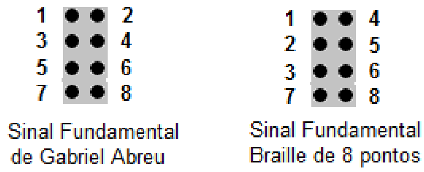


Figura 2.4-01: Señales fundamentales: de Gabriel Abreu y del Braille de 8 puntos

Destáquese, sin embargo, que el código braille de 8 puntos fue creado teniendo por base dos principios fundamentales[70]:

1º máxima concordancia posible entre el código de 8 puntos y lo de 6 puntos;

2º establecimiento de una correspondencia predefinida entre los prefijos del sistema braille de 6 puntos y los puntos 7, 8 y 78 del código de 8 puntos, de modo que facilitase la memorización y la posibilidad de una conversión automática entre los dos códigos.

En la tabla siguiente se evidencia una correspondencia entre los prefijos del sistema de 6 puntos y los puntos 7, 8 y 78 del sistema de 8 puntos[71].

Descripción numérica del prefijo en el sistema de 6 puntos	**Descripción numérica en el sistema de 8 puntos**	**Observaciones**
3456	8	símbolo de números
4	78	til ~
45	7	trema ¨
456	78	%
5	8	señal indicativa de minúscula latina
46	7	señal indicativa de mayúscula

Así, por ejemplo, para la letra "A", (A mayúscula) y para los número "1", cuyas codificaciones en braille se obtienen a partir de la codificación del "a", se tiene en braille de 6 puntos y de 8 puntos la siguiente traducción numérica:

[70] COMISSÃO DE BRAILLE (2003, pag. 45).
[71] COMISSÃO DE BRAILLE (2003, pag. 46).

	a	A	1
Braille de 6 puntos	1	46,1	3456,1
Braille de 8 puntos	1	17	18

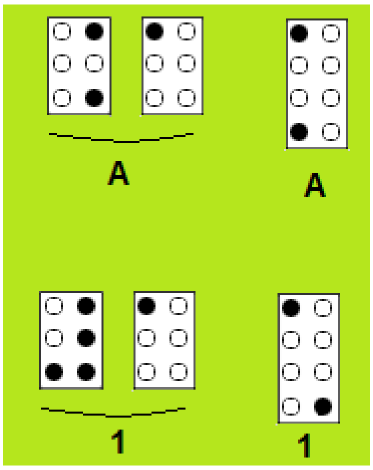


Figura 2.4-02: Codificación en braille de 6 e de 8 pontos de la letra “A” y del número “1”.

2.5 - LA ENSEÑANZA DEL BRAILLE

2.5.1 - Introducción

En los métodos de enseñanza de la lectura/escrita, para la generalidad de los niños o de los adultos analfabetos, los métodos de enseñanza se clasifican[72] en analíticos (o globalizados), sintéticos y eclécticos (o mixtos).

En los métodos analíticos, el aprendizaje se hace a partir de las frases y/o de palabras para llegar a unidades sintácticas más pequeñas, sílabas y/o letras.

En el ámbito de los métodos analíticos, en los últimos decenios del siglo XIX se distinguió, en Portugal, la figura de João de Deus[73], que concibió un método conocido como "Método João de Deus" que tuvo como soporte una monografía de su autoría intitulada "Cartilla Maternal" con gran éxito en el país.

Contrariamente a los métodos analíticos, los métodos sintéticos se caracterizan porque las letras se enseñan individualmente, después las sílabas, a continuación las palabras y, finalmente, las frases. Estos se clasifican en alfabéticos, fonéticos y silábicos

En los métodos alfabéticos las letras se aprenden por su nombre, tanto en minúscula como en mayúscula, como por ejemplo, entre otros, "be", "efe" y "te". Tras conocerse varias letras, éstas van siendo combinadas en grupos de 2, o hasta más letras formando sílabas y/o palabras. En los métodos fonéticos las letras son aprendidas por su sonido, como por ejemplo "p" de "pato" o "m" de "miau" y van siendo combinadas a medida que el alumno las va dominando. El método silábico es semejante a los anteriores, sólo que en vez de letras aisladas, la unidad mínima de aprendizaje es la sílaba como, por ejemplo, "pa" de "papa".

---

[72] KAREL (1961, p. 20-229).
[73] Referido en el inicio de la sección anterior.

En los métodos eclécticos, también denominados de mixtos, hay una combinación intencional de métodos anteriores, sea en la versión analítico-sintética, sea en la versión sintético-analítica, conforme el educador entienda por más adecuado. Por ejemplo, en el método de Paulo Freire, vacacionado para la alfabetización de adultos, se busca hacer un levantamiento del conjunto de vocablos que los alumnos dominan. Para el efecto, en conversaciones informales, se seleccionan ciertas palabras, como el ya referido ejemplo, "PATO". Después se procede a su división silábica, que en el ejemplo consiste en "PA" y "TO" y, a partir de las sílabas "PA", PE", "PI", "PO", "PU" y "TA", TE", "TI", "TO", "TU", se incentiva a la construcción de nuevas palabras

2.5.2 - Métodos de enseñanza para personas ciegas

El sistema visual, tal como ya fue referido en el capítulo introductorio, tiene un carácter más lato permitiendo al vidente tener una perspectiva global de un todo Con el tacto eso no acontece pues es necesario, previamente, analizar cada una de las partes en que lo todo es constituido y, sólo después, a partir de ellas, por un proceso de síntesis es posible construir lo todo.

Esta es la razón que justifica que los métodos sintéticos sean más utilizados para la enseñanza del braille que los métodos analíticos

Sin embargo, dos observacions deben ser tenidas en cuenta:

- la primera evidencia que cuando el niño ya domina razonablemente la lectura, el hecho de reconocer con facilidad grupos de sílabas o de palabras puede proporcionar un aumento significativo de velocidad en la lectura táctil;

- la segunda, realza que, según especialistas, para un niño que se inicia enel aprendizaje de la lectura y escritura a través del sistema braille, es recomendable, siempre que sea posible, que le sea proporcionado el mismo método que para sus compañeros videntes.

Se debe evidenciar, sin embargo, que muchos métodos preconizan que el niño debe conocer previamente, con grande destreza, la señal fundamental, con los seis puntos distribuidos por una matriz de 3 líneas y dos columnas. Para el efecto, inclusive, pueden ser proporcionados materiales en los que la célula braille es presentada en grandes dimensiones, para un más adecuado aprendizaje por parte del niño, como por ejemplo una caja de 6 huevos, donde en vez de huevos se utilizan bolas de ping-pong o el muñeco Braillin.

El muñeco Braillin fue inventado por una profesora argentina, que presenta, en su cuerpo, la célula braille, bajo la forma de un conjunto de 6 botones.

Figura 2.5.1-01: Muñeco Braillin.

Sobre las potencialidades del muñeco Braillin, por su interés, se transcribe lo que refirió María Luz Laine Mouliaá, directora de Educación de la ONCE[74]:

> *«…Con el Braillín, queremos potenciar aquellas actividades y experiencias que permiten el adecuado desarrollo educativo, afectivo y social de los niños con deficiencia visual y contribuir para que los demás compañeros conozcan el código Braille y las reglas básicas en la relación con las personas que tienen ese tipo de deficiencia. Y todo eso a través de una actividad que es muy importante para ellos: el juego»*

Según LUNA LOMBARD y ESPINOSA RABANAL (2012, pp. 50-54), los métodos más utilizados[75] para la enseñanza del braille son Alborada, Bliseo, Pérgamo, Punto a Punto, Tomill y Braille para Personas Adultas.

En el método Alborada las letras son presentadas en una orden que tiene en cuenta la simplicidad de los símbolos braille: a, o, u, e, l, p, i, b, m, s, n, v, d, ñ,

---

[74] Referido en el inicio de la sección anterior.

[75] En Portugal, segun la Dra. Ana Paula Sousa, en entrevista concedida en el día 19 de Octubre de 2012, no existe un método específico, todo dependiendo del binomio profesor/alumno. En este ámbito, ella misma está investigando un método que pueda ser aplicado a un conjunto significativo de niños.

g, t, f, ll, r, c, y, j, q, h, z, x, ch, k, punto, signo de mayúscula, sílabas trabadas[76], á, es, ó, coma, punto y coma, dos puntos, guión, í, ú, ü, w, interrogación, exclamación y señal de número.

El método Bliseo es propio para el aprendizaje del sistema braille por adultos alfabetizados. Se profundizan las diferentes formas que la señal fundamental genera, introduciéndose las letras de la primera serie; se sigue después la segunda serie[77] y en el fin las últimas 5 letras del alfabeto[78].

El método Pérgamo es propio para la alfabetización de personas ciegas adultas, Inicia con el reconocimiento de los puntos dentro de la señal fundamental, sin tener en cuenta que el símbolo generado tenga o no significado. Son presentadas las letras por el siguiente orden: a, e, i, o, u, l, s, p, m, f, d, n, t, ñ, c, h, á, é, b, v, ll, y, r, í, ó, ú, g, j, z, mayúsculas, punto y coma; luego se presentan las letras menos utilizadas x, q, ch, k, w, ü. Se siguen, después, las sílabas trabadas, las señales de número y de puntuación, el guión, dos puntos, punto y coma, interrogación, exclamación, aspas, paréntesis y, finalmente, otros símbolos de mayor complejidad.

En el método punto por punto hay dos fases a considerar: una primera fase, en que se presenta un programa de preparación previa para la lectura a la escritura, a través del reconocimiento de formas de diversos tamaños, como el cuadrado, el círculo, el triángulo y el rectángulo, de líneas horizontales y verticales y, también, de conjuntos de puntos sin dárseles un significado particular. Después, en un segunda fase, es proporcionada la enseñanza del sistema braille siendo la orden de presentación de las letras la siguiente: a, o, u, e, l, p, b, m, n, f, i, signo de mayúscula y punto, r, s, apóstrofe, t, ll, c, exclamación, d, interrogación, g, j, á, í, ú, v, coma, x, h, q, punto y vírgula, ñ, z, dos puntos, é, ó, ü, t y k.

El método Tomil es un método de iniciación a la lectura braille dirigido particularmente a los niños. En paralelo con la presentación de contenidos se

[76] Las sílabas trabadas son de la forma consonante- consonante- vocal, como, por ejemplo, pra, bla, entre otros.
[77] Se obtiene a partir de los símbolos de la 1ª serie adicionándose el punto 3.
[78] Adicionando el punto 6 a los primeros cinco símbolos de la 2ª serie.

hace, también, la explotación táctil. Las letras son presentadas por la siguiente orden a, o, u, e, l, p, á, b, c, d, m, signo de mayúscula, punto, i, n v, ó, s g, t, f, r í, ll, j, z, ñ, é, h, y, ch, ú, q, rr, r, gu

Finalmente, en el que respeta a Braille para Personas Adultas hay que destacar que la persona adulta que se enuentra con la pérdida de visión tiene necesidad de aprender el sistema braille, sin embargo, previamente, tendrá que desarrollar las *destrezas necesarias para tener acceso al nuevo sistema y tener la fuerza psicológica para lograr adaptarse a una nueva realidad. Su alfabetización se deberá efectuar, pues, en el ámbito de un programa de rehabilitación individual

2.5.3 - Situación en Portugal

Los primeros libros en braille, provenientes de Francia e impresos en el Instituto Nacional de los Jóvenes Ciegos, en París, fueron introducidos en Portugal, en 1884, por el poeta João de Deus (1830-1896)[79]. Este fue uno de los primeros colaboradores del Asilo-Escuela creado, en 1888, por la Associação Promotora do Ensino dos Cegos[80], y fue Afonso Leche, el primer profesor invisual de esta institución[81].

En Portugal, oficialmente el sistema braille fue aprobado, en 22 de Mayo de 1930, por el Decreto nº 18 373, como método de lectura y escritura para ser utilizado por las personas ciegas de acuerdo con la ortografía oficial entonces existente[82].

Hasta al inicio de la década de los años sesenta del siglo pasado, la enseñanza de los jóvenes ciegos era hecha en instituciones propias, en régimen de internado, donde aprendían el sistema braille de una forma muy consolidada, dado que, en ese contexto, tenían un contacto muy intenso con sus profesores.

---

[79] GUERRINHA, Dalila (2004, pp. 318-319),
[80] Ver subsección 4.2.1.2.
[81] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 90).
[82] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 15).

Con los procesos de integración en escuelas regulares, que sin embargo ocurrieron, se dio un paso muy positivo para la socialización de los alumnos ciegos. Sin embargo, el contacto de estos, con los profesores que les enseñaban el braille, dejó de ser tan estrecho, lo que tuvo como consecuencia que la enseñanza del braille fue perdiendo calidad.

En las últimas décadas, con el surgimiento de las tiflotecnologias de la información y de la comunicación, que constituyó una segunda revolución en el acceso a la información, se ha un enorme avance en la posibilidad de socialización de las personas ciegas. Se verificó, sin embargo, que en las generaciones más jóvenes, se asiste a un descuido de la práctica del braille. A este propósito transcribo[83]:

> *"…Practicarse solamente la lectura sonora, despreciando la lectura en braille, que conduce inevitablemente a un empobrecimiento. Esta situación es en todo análoga a la de una persona normovisual que no practica la lectura y sólo se limita a oír."*

Ana Paula Sousa, persona ciega, doctoranda en Didáctica del Braille, en entrevista que me concedió, el día 19 de Octubre de 2012, en las instalaciones de la Universidad Lusófona de Humanidades y Tecnologías, refirió que los años 90 del siglo pasado, la enseñanza integrada comenzó a ser contestada porque los profesores de apoyo eran muy generalistas pues "apoyaban" todo y cualquier tipo de deficiencia, acabando por no tener formación especializada en cualquier área. De este modo, muchos alumnos llegaban a la enseñanza secundaria y, hasta, a la enseñanza superior, cometiendo incontables errores en la escritura del braille. Aquí, en su opinión, dos situaciones podrían justificar tal hecho: a impreparación en el braille y/o falta de interiorización de las normas sintácticas de la lengua portuguesa.

Preocupados con la situación evidenciada en el párrafo anterior, la tercera comisión del braille, presidida por el Dr. Orlando Monteiro, de 21 de Abril de 1998, definió un conjunto de términos, que pasó a designarse: "Glosario sobre

[83] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 71).

el Braille”. Uno de esos términos fue “braillologia” que resulta de la concatenación de los términos “braille” y “logos”, y cuya definición es la siguiente:

> *“…Conjunto de los conocimientos que consubstancian y encuadran las materias de las varias vertientes de la problemática del braille”.*

Por su interés, de Augusto Deodato Guerrero, transcribo el siguiente[84]:

> *“… Desde entonces, el braille pasó a representar por excelencia, para mí, el vital proceso para una más amplia interacción social y cultural”.*
>
> *“El braille pasó a ser mi horizonte excelso de permanentes descubrimientos y de estimulantes ventajas, permitiéndome estudiar, abrazar una carrera profesional y un recorrido académico sin fin, así como rasgar caminos y nuevos mundos en la ciencia”.*
>
> *“El sistema signográfico compuesto de grafemas táctiles dispuestos y ordenados en una secuencia lógica de 64 señales simples, designado por “Sistema Braille”, constituye el universalmente adoptado instrumento intelectosocial y polivalente para la representación gráfica de todos los dominios del conocimiento”.*

Finalmente se debe destacar que, en Portugal, el Centro de Rehabilitación Nuestra Señora de los Ángeles (CRNSA)[85], en Lisboa, con cerca de 50 años de existencia, desempeña un papel de gran importancia en la integración de personas mayores de 16 años, que eran normovisuales y que, por cualquier contingencia de la vida, quedaron ciegas o ambliopes.

Refiérase, también, que el CRNSA dispone de una capacidad máxima para 22 personas y, también, con carácter más esporádico, proporciona apoyo a

[84] GUERREIRO (2011a, p. 28 - 32).
[85] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 115).

personas con ceguera congénita, o adquirida, que manifiesten necesidades específicas para su vida cotidiana.

Cabe señalar, también, que el CRNSA, para una mejor integración de sus usuarios, coopera con otras entidades en las áreas de salud, formación profesional y educación regular, así como con instituciones dirigidas específicamente a apoyar a las personas con necesidades visuales, tales como la Asociación de Ciegos y Amblíopes de Portugal (ACAPO), el Lar Branco Rodrigues, la Fundación Raquel Foundation y Martin Sain, la Asociación de Apoyo a la Información a Ciegos y Amblíopes (AAICA) y, también, la Asociación Promotora de Empleo de los Deficientes Visuales (APEDV).

3 - LAS TIFLOTECNOLOGÍAS

3.1 - INTRODUCCIÓN

Las tiflotecnologias[86] son conjuntos de técnicas y de métodos inherentes a la concepción, desarrollo y utilización de equipamientos específicamente concebidos para que las personas ciegas, o con visión subnormal, puedan usufructuar, en tanto en cuánto sea posible, de las múltiples facetas que la vida real proporciona al ciudadano común. Como ejemplos de tales equipamientos pueden referirse, entre otros:

- un bastón munido con un sensor para detección de obstáculos, en el ámbito de la movilidad;
- una máquina Perkins para escritura en braille;
- un lector de libros que posibilite la transcripción de un texto en caracteres comunes hacia un formato audio y/o para formato braille, en el ámbito del acceso a la información;
- el Multiplano para la enseñanza/aprendizaje de la Matemática, que tanto puede ser dirigido a alumnos ciegos como a alumnos que lo no sean.

En los dos subcapítulos siguientes voy a referir las tiflotecnologias que en la actualidad son más utilizadas en Portugal, el primero en lo que respecta al acceso a la información y a la comunicación y, el segundo en lo que respecta a la enseñanza de la Matemática para las personas ciegas.

Antes, sin embargo, debo señalar la figura del Ingeniero Jaime Octavio de Magalhães Filipe (1923-1992) que, siempre preocupado con las personas con necesidades especiales, colocó al largo de la vida, toda su inteligencia y energía en la concepción de equipamientos, en las más diversas vertientes, destinados a ayudar a sus conciudadanos. Fue, así, como, en 1959, idealizó el "electrovisor"[87] (sistema de visión táctil para ciegos) registrado en 2 de Mayo de

[86] La expresión "tiflotecnologia" resulta de la concatenación del término "tiflo", relacionando persona ciega y tecnología.
[87] GONÇALVES DA SILVA (2007, p.117) citando OLIVEIRA, F. (2004).

1960, con el número 36.581 pero, por no tener apoyos financieros, no pudo concretizar su producción[88]. Este sistema de visón táctil, diez años más tarde, con la designación de Optacon, fue producido y comercializado por la empresa norteamericana Telesensory.

El Optacon[89], al cual se refiere la figura[90] siguiente, fue, históricamente, el primer dispositivo con tecnología electrónica puesto a la disposición de las personas ciegas.

Figura 3-01: El Optacon.

[88] GONÇALVES DA SILVA (2007, p.117) citando GUERREIRO (2000).
[89] GONÇAVES DA SILVA (2007, pp. 117-118), citando BONET BORRÁS (2004).
[90] Imagen obtenida a partir del sítio de INTERNET https://www.google.pt/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=OPTACON, accedido en 15 noviembre de 2014.

3.2 - TIFLOECNOLOGIAS PARA EL ACCESO A LA COMUNICACIÓN Y A LA INFORMACIÓN

3.2.1 - Robobraille

Se trata de un servicio gratuito, aún en fase de pruebas, disponible a cualquier ciudadano, concebido por un consorcio de empresas de Chipre, Portugal, Italia, Irlanda y Reino Unido, que consiste en un conversor automático de ficheros en formato de texto a ficheros en formato audio y/o formato braille. Este servicio se desarrolla en cuatro fases:

1) fase de cargamento de un fichero de “input”,
2) fase de selección del formato del fichero de “output”,
3) fase de selección de la lengua natural utilizada;
4) fase de envío.

En la fase de cargamento el usuario selecciona un fichero que pretenda convertir y que esté en uno de los formatos .doc, .docx, .pdf, .txt, .xml, .html, .htm, .rtf, .epub, .mobi, .tiff, .tif, .gif, .jpg, .bmp, .pcx, .dcx, .j2k, .jp2, .jpx, .djv y .asc; a continuación, en la fase de selección, el usuario indica cómo quiere recibir el fichero de “output”, debiendo, para el efecto, seleccionar uno de los formatos mp3 audio, “daisy full text and audio”, e-Book, “document conversion” y braille; después, en la fase siguiente, se indica cuál es la lengua natural que debe de ser utilizada, finalmente, en la fase de envío, se indica la dirección de email donde se pretende recibir el fichero de “output” y se procede al envío propiamente dicho.

3.2.2 - Mecbraille

El MECBRAILLE – Marco Electrónico de Correo Braille es un servicio puesto a disposición del público, desde Marzo de 2002, por el Centro de Ingeniería de Rehabilitación en Tecnologías de la Información y de la Comunicación de la Universidad de Tras-los-Montes y Alto Doro (CERTIC-UTAD).

Este servicio permite que una persona normovisual pueda enviar, a otra persona, que sea ciega, un texto ASCII, hasta 4000 palabras. Para ello, el remitente llena un formulario, (al cual se refiere, parcialmente, la figura siguiente[91]) donde escribe el texto, su identificación y la identificación del destinatario.

Figura 3.2.2-01: (Parte inicial del) Formulario del servicio MECBRALLE (antes)[92]

El formulario, tras rellenado, es enviado a la dirección electrónica acessibilidade.net donde el servicio creado por la CERTIC-UTAD, de forma automatizada, convierte el texto para braille, imprime el resultado de la conversión en una impresora braille y envía, por el correo normal, el texto final al destinatario.

Sin embargo, por razones que pienso tiene que ver con los recortes presupuestarios hechos en las instituciones de le enseñanza superior, este servicio está temporariamente indisponible tal como lo muestra la figura siguiente[93].

Figura 3.2.2-02: (Parte inicial del) Formulario del servicio MECBRALLE (ahora)

[91] CERTIC (2002).
[92] GONÇALVES DA SILVA (2007, p. 125)
[93] CERTIC (2002).

3.2.3 - Máquinas de Escribir Braille

La máquina más divulgada a nivel mundial, ya con 65 años de edad, es la de la marca Perkins, puramente mecánica, que tiene como principal fabricante a Perkins School for the Blind en Massachussets. Dispone de un teclado que permite que los caracteres braille sean impresos en papel, estando este, previamente rebobinado de forma manual y prendido a la máquina por dos botones pertinentes al efecto. Del teclado, tal como la figura siguiente muestra, se señalan siete teclas para la escritura de texto y dos más, una del lado izquierdo para cambio de línea y otra del lado derecho con la función de retroceso. De las siete teclas para la escritura, tres están del lado izquierdo para definición de los puntos 1, 2 y 3 de la célula braille, tres del lado derecho, para definición de los puntos 4, 5 y 6 y la séptima, al centro, como espaciador.

Para un aprovechamiento eficiente de la máquina, la tecla destinada al punto 1 debe ser presionada por el indicador izquierdo, la relativa al punto 2 por el dedo medio izquierdo y la inherente al punto 3 por el anular izquierdo. Por su parte las teclas relativas a los puntos 4, 5 y 6, respectivamente, deben ser presionadas por el indicador derecho, por el dedo medio derecho y por el anular derecho. El espaciador debe ser presionado por uno de los pulgares.

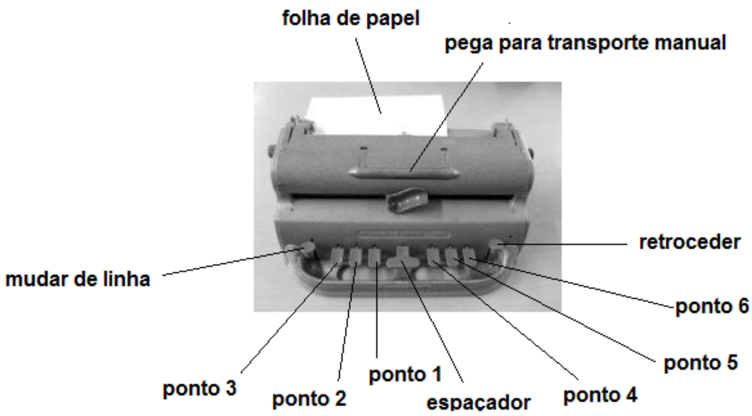


Figura 3.2.3-01: Máquina de escribir Perkins, modelo antiguo.

En la actualidad es comercializado el modelo Perkins Braille NG, con un sistema de alimentación de papel más perfeccionado, más leve, más silencioso y más suave en la escritura del de los modelos anteriores. Sin embargo, este modelo adolece de algunos problemas de concepción, que lo hacen más vulnerable a las averías.

Con tecnología electrónica menciono a Mountbatten Brailler Writer, producto de la empresa australiana Quantum Technology Pty Ltd, que presenta tres plantillas: Mountbatten Brailler Writer, Mountbatten Brailler Writer Plus y el Mountbatten Brailler PRO. Las plantillas son físicamente semejantes y todos contemplan la alimentación por batería o por corriente usual en las instalaciones domésticas.

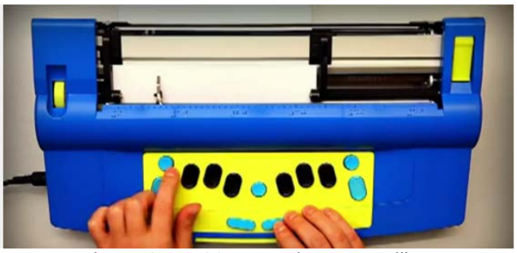


Figura 3.2.3-02: Mountbatten Brailler.

El Mountbatten Brailler Writer es la plantilla más simple, con una capacidad de memoria de 95 Kilobytes, lo que equivale a 150 páginas en braille. Es muy adecuado para ser utilizado en el proceso de enseñanza/aprendizaje del sistema braille, pues dispone de un sistema de voz digitalizada que permite verificar si el texto fue, o no, introducido de forma correcta, pudiendo la audición de la voz digitalizada ser hecha a través de unos auriculares.

El modelo contempla la posibilidad de conexión a un pequeño dispositivo, denominado Mimic, con autonomía propia, que permite guardar hasta cerca de 32 páginas braille y que, al disponer de un pequeño visor, posibilita que el texto pueda ser vuelto a ver y corregido por una persona normovisual

Figura 3.2.3-03: Mimic de la Mountbatten Brailler.

El modelo plantilla Mountbatten Brailler Writer Plus, que en términos físicos es semejante a la plantilla anterior, dispone de una memoria con una capacidad de 400 Kilobytes, lo que corresponde a 600 páginas braille, y contempla una conexión a un teclado de un ordenador para introducción de texto ASCII y conversión automática para braille. El modelo contempla, también, la posibilidad de conexión directa a un ordenador personal, para intercambio de ficheros.

El modelo plantilla más sofisticada, el Mountbatten Brailler Writer PRO, físicamente semejante a los anteriores, dispone de un sintetizador de voz y de software del tipo bloque de notas con la posibilidad de edición de texto. Por desgracia, no está disponible para la lengua portuguesa.

Como curiosidad indicamos que existen máquinas que producen etiquetas en Braille que pueden ser utilizadas para identificar objetos. Una de esas máquinas es la pistola Dymo a la cual se refiere la figura siguiente. Existe también un adaptador para las máquinas Perkins que permite la escritura en cintas Dymo.

Figura 3.2.3-04: Pistola Dymo.

3.2.4 - Los Lectores de Pantalla

La información que se puede observar en una pantalla de un ordenador es obtenida a partir de una pequeña memoria asociada a ese periférico. El lector de pantalla es un software que utilizando la información existente en esa memoria se transmite para un sintetizador de voz y/o para una línea braille que a él esté conectado. De este modo, la información existente en la pantalla queda disponible a través del sonido, en la primera situación y a través del tacto, en el segundo caso.

Una característica común de los lectores de pantalla es que, a través de la manipulación del teclado del ordenador, el cursor se va desplazando sobre la pantalla y el lector de pantalla, controlando la posición del cursor, por cada ítem seleccionado, informa al utilizador, a través del sonido, de las diversas opciones disponibles, incluyendo la navegación en INTERNET.

De entre los principales lectores de pantalla que pueden indicarse: el Window-Eyes, el JAWS, el Supernova, el Virgo, el DosVox y el NDVA. A continuación, y aunque de manera breve, nos referimos a cada uno de ellos.

1) El Window-Eyes es un producto de la GWMicro, Inc y existe en su versión 8.0, siendo muy utilizado en EEUU y en la república checa. Utiliza el Eloquence, como sintetizador de voz por software, contemplando 10 idiomas entre los cuales están el castellano y el portugués.

2) El Jaws fue concebido en el ámbito del sistema operativo DOS y fue siendo mejorando a medida que los sistemas operativas fueron evolucionando. El hecho de existir una cooperación muy estrecha entre la Freedom Scientific y Microsoft permitió al Jaws disponer de facilidades, como por ejemplo, la inserción de “scripts” que los usadores pueden concebir en consonancia con sus necesidades, haciéndolo un lector de pantalla muy flexible y existiendo, inclusive, su versión para Windows, conocida por la sigla JFW (Jaws For Windows). Utiliza como sintetizadores de voz el Eloquence y el Vocalizer. Al presente está en la versión 14.

3) El SuperNova es un producto de la empresa Dolphin y contempla, bien las funcionalidades del lector de pantalla o las de ampliador. Utiliza los sintetizadores de voz Orpheus y Vocalizer. Es muy utilizado en Reino Unido y en Suecia.

4) El Virgo (Virtual Graphica Overlay) es un lector de pantalla concebida por la empresa alemana BAUM Retec AG. Relativamente a este

lector de pantalla, ya hace cerca de ima decena y media de años, la ONCE elaboró un protocolo de colaboración con la BAUM para divulgación de este lector de pantalla, en ambiente Windows, para los invidentes españoles asociados[94].

5) El DOSVOX, creado por la Universidad Federal de Río de Janeiro (UFRJ) contempla, más allá de las funciones de lector de pantalla y de ampliador, utilizando síntesis de voz en portugués, otros módulos tales como el EDIVOX, para edición de textos, el WEBVOX, para navegación en INTERNET, el CARTAVOX, para el correo electrónico, el MAPAVOX para gestionar el sonido de maquetes sonoras, el BRAIVOV, para la impresión en braille, y la PLANIVOX, como hoja electrónica de cálculo. Al contrario de los otros lectores de pantalla, atrás referidos, el DOSVOX está disponible en INTERNET de forma gratuita.

6) El NVDA (NonVisual Desktop Access) es un lector de pantalla, también, gratuito y de código abierto para Windows[95]. Funciona en los sistemas operativos Windows 8, 7, Vista y XP, tanto en 32 como de 64 bits.

Como nota final, en esta sección,refiérase que, a la semejanza de lo que fue indicado para los ordenadores, también, hay teléfonos móviles para personas con necesidades visuales que contemplan la lectura de pantalla. Dos ejemplos son el Talks y el Mobile Speak que permiten hacer y recibir llamadas, leer y escribir mensajes, organizar contactos y listas de llamada, navegar en INTERNET, enviar y recibir emails, organizar el calendario para incluir en la agenda compromisos y acompañarlos usando alarmas y recordatorios, crear notas de texto y voz, efectuar cálculos, oír música y “podcasts”, configurar las definiciones del teléfono (como por ejemplo, el perfil, el tipo de toque y la

---

[94] TORRECILLA DELGADO (1996).
[95] LERPARAVER (2010).

definición de teclas de marcación rápida) y compartir datos entre el dispositivo y otros teléfonos móviles y ordenadores[96].

3.2.5 - Sintetizadores de Voz

Hasta 1995 los sintetizadores de voz eran equipamientos exteriores al propio ordenador. A partir de ahí, y utilizándose las potencialidades de la placa de sonido existentes en los ordenadores, los sintetizadores de voz pasaron a ser concebidos en software y a funcionar articuladamente con los lectores de pantalla, como si fueran parte integrante de estos[97]. Como ejemplos refiero el Orpheus, utilizado por el lector de pantalla Supernova, y el Eloquence utilizado por los lectores de pantalla Jaws y Window-Eyes.

3.2.6 - Líneas Braille

Las líneas braille son dispositivos tiflotécnicos constituidos por un conjunto de, normalmente, 20, 32, 40, 60 o 80 células piezoeléctricas, dispuestas en línea que se conectan a un ordenador, a través de una de las puertas comunicacionales de éste, posibilitando, así, la reproducción en braille informatizado (células de 8 puntos) del texto presente en la pantalla del ordenador.

Como es del conocimiento general, las personas normovisuales hacen una utilización muy intensa del teclado y del ratón, como órganos de entrada, y de la pantalla, como dispositivo de salida; por su parte, para una persona con necesidades visuales es muy común el uso del teclado, como órgano de entrada, y de la línea braille, como equipamiento de salida, por lo que estos dos dispositivos, para aumentar la velocidad de procesamiento de las operaciones de escritura (via teclado) y de lectura (via línea braille), cuando están

[96] Ídem.
[97] GONÇALVES DA SILVA (2004, p.140).

conectados a un mismo ordenador, están físicamente próximos uno del otro, tal como la figura siguiente muestra.

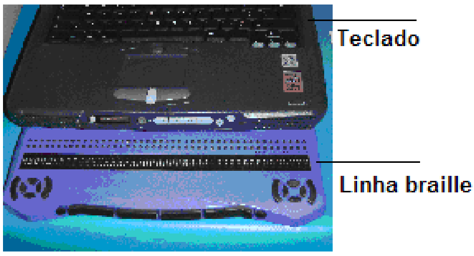


Figura 3.2.6-01: Teclado/Linea braille.

3.2.7 - Ordenadores Autónomos

Los ordenadores autónomos permiten a las personas ciegas que aprovechen las mismas funcionalidades que las personas normovisuales cuando utilizan los usuales “personal computeres” (PC´s), o los “Personal Digital Assistant” (PDA´s) o, más recientemente, los “smartphones”. A título de ejemplos refiero, al nivel de un PC, el Eurobraille-Iris-40 y los equipamientos Listo y Nokia Lumia 920, a nivel de un PDA y de un “smartphone”, respectivamente.

El EuroBrialle-Iris 40 es un ordenador portátil producido por la empresa francesa EuroBraille París. Dispone de un teclado braille y de una línea braille con 40 caracteres. Contempla las funciones de escritura y lectura de textos, gestión de ficheros, calendario, calculadora científica, hoja de cálculo, libro de direcciones, correo electrónico y en la navegación en INTERNET. Es compatible con los lectores de pantalla, Window-Eyes, Jaws y Virgo. A él se refiere la figura siguiente.

Figura 3.2.7-01 Computador portátil Eurobraille-Iris 40

Por su parte, el Pronto es un equipamiento producido por la empresa BAUM Retec AG. Es muy leve (450 gramos), dispone de un teclado braille y de una línea braille de 18 células

Figura 3.2.7-02 PDA Pronto

El Pronto contempla un sintetizador de voz en portugués y, también, un conjunto de funciones muy interesantes entre otras:

- la sincronización a un “Personal Computer” (PC) para transferencia de datos siendo la línea braille del Listo utilizada como terminal del PC;
- la organización de notas;
- la lectura de libros;
- la conexión al lector autónomo Poet Compact;
- envío y recepción de mensajes;
- calculadora científica.

Finalmente, como ejemplo de un “smartphone”, me refiero el NOKIA Lumia 920, al cual aludo en la figura siguiente[98], que ejecutando el sistema operativo Windows Phone 8, contempla, más allá de las funcionalidades de un teléfono móvil con lector de pantalla, otras funcionalidades más avanzadas como la posibilidad de conexión Bluetooth, o como dispositivo de envío y recepción de datos a través de INTERNET.

[98] MICROSOFT (2012).

Figura 3.2.7-03: NOKIA Lumia 920.

3.2.8 - Lectores Autónomos

Los lectores autónomos son equipamientos que contemplan un “scanner”, un programa de reconocimiento de caracteres, un sintetizador de voz y un dispositivo autónomo de almacenamiento.

Con el “scanner” se realiza la digitalización de los documentos, después, el programa de reconocimiento de caracteres identifica las secuencias de caracteres, que constituyen las palabras, siendo la información almacenada en dispositivo propio que ha incorporado un sintetizador de voz con el objetivo de efectuar la reproducción, en términos sonoros, sin embargo de la información procesada.

A título de ejemplo se presenta Poet Compact-2 de la BAUM, al cual se refiere la figura siguiente[99].

Figura 3.2.8-01: Máquina de Lectura Poet Compact-2

El Poet Compact-2 contempla[100], entre otras, las funcionalidades siguientes:

[99] BAUM (2012).

- el almacenamiento, en formato A4, de más de 10 000 000 de páginas de texto;
- la organización de los textos por carpetas temáticas; la lectura en diversas lenguas, incluyendo el portugués; el control del volumen y de la velocidad de lectura;
- la posibilidad de transferencia de los textos para otro lector autónomo u ordenador; conexión directa para la transferencia de documentos al Pronto y el BrailleNote;
- conexión directa a una línea braille, pudiendo ésta no estar físicamente conectada al equipamiento
- lectura de códigos de barras para identificación de objetos.

3.2.9 - Lectores DAISY[101]

El Sistema DAISY fue concebido, en 1994, en Suecia, teniendo por objetivo la introducción de un conjunto de normas en los procesos de grabación digital de documentos seguido por el Consorcio Daisy - conjunto de los más variados organismos internacionales que libremente siguen tales normas.

El sistema DAISY, entre otros aspectos, contempla la posibilidad de inserción de marcas estructurales en los documentos digitalizados con el fin de facilitar no sólo la producción, la reproducción y el acceso a los documentos, sino también, el manejo del mismo por parte de aquellos que, por los más diversos motivos, tienen dificultades en el proceso de lectura de documentos.

En forma muy simple se puede afirmar que un documento DAISY, es decir, un documento grabado según las normas del sistema DAISY, está constituido por un conjunto de ficheros que contienen, naturalmente, información digitalizada de la que se destaca:

- uno o más ficheros, con marcas estructurales, conteniendo una

---

[100] ATARAXIA (2012).
[101] GONÇALVES DA SILVA (2007, pp.144-146).

narración sonora de un texto efectuada por uno o más locutores;

- uno o más ficheros, también con marcas estructurales, conteniendo el texto escrito;

- un fichero de sincronismo cuyo objetivo es posibilitar una permanente relación entre el fichero audio y el fichero escrito;

- un fichero de control de navegación con miras a posibilitar a los usuarios que pasen de una frase para otra, adyacente o no, sea para el frente sea para tras, de una forma lo más cómoda posible y manteniéndo, siempre, el sincronismo entre los ficheros que contienen las informaciones sonora y escritura.

Los documentos DAISY son grabados en CD lo que permite, comparativamente a los documentos grabados en casettes audio, una mayor longevidad, una mejor calidad de sonido y una mayor flexibilidad en la organización de la información. En media, un documento grabado en 10 casetes audio necesita de un único CD, con la facilidad de poder ser leído por cualquier lector que lea el formato común Mp3. Refiérase, también, que el formato DAISY, por ser una norma internacional, permite el intercambio de libros por el mundo entero, con la garantía de compatibilidad.

Como principales lectores DAISY existentes en el mercado portugués pueden ser referidos el EasyReader de la Dolphin Computer Access representada por la ElectroSertec[102], Lda, y de la VisuAide y las plantillas Victor Wave, Victor Vibe y Victor Classic por la Ataraxia, Lda.

El modelo Victor Classic, al cual se refiere la figura siguiente, dispone de teclas parlantes.

[102] La ElectroSertec, Lda. y la Ataraxia, Lda. son las empresas de comercialización de tifloequipamientos más representativas en Portugal.

Figura 3.2.9-01: Lector DAISY Victor Classic

3.2.10 - Impresoras Braille[103]

Las impresoras braille son equipamientos susceptibles de ser utilizadas por cualquier ordenador como lo son la generalidad de las otras impresoras, las cuales, en el contexto de la tiflotecnologia, son referidas como impresoras a tinta. Reálcese que, mientras estas imprimen ficheros en texto ASCII, las impresoras braille imprimen ficheros en texto braille.

Destáquese, también, que para imprimir en una impresora en braille un fichero conteniendo un texto ASCII es necesario que haya una previa conversión de un tipo de fichero para otro y, para que la impresión en braille sea lo más perfecta posible, es necesario formatear adecuadamente el fichero que contenga el texto braille, pues bien sea el número de caracteres por línea, o el número de líneas por página, es diferente para la impresión la tinta del de la impresión en braille. Para este efecto existen aplicaciones designadas por editores braille, entre los cuales se refiere el Winbraille y el Braille Fácil.

Nótese, también, que el papel utilizado con una impresora braille tiene, normalmente, una gramaje (número de gramos por metro cuadrado) superior al papel utilizado en las impresoras la tinta. Este hecho es tanto más relevante si la impresión es realizada en los dos lados del papel (impresión interpunto).

De entre las impresoras braille más utilizadas se destacan las de la marca Index la cual presenta las plantillas Basic y Everest. Además de eso, como la

[103] GONÇALVES DA SILVA (2007, pp. 147-149).

impresión en braille provoca alguna polución sonora existen coberturas acústicas para las impresoras referidas.

La Index Basic presenta dos versiones: S y D, para impresión simple e interpunto, respectivamente.

La impresora Index Basic D, que la figura a continuación presenta[104], pesa 8 kg y presenta las dimensiones 52,1 cm × 24,6 × 12,0 cm. Utiliza papel continuo, con bandas perforadas, tiene una velocidad de 78 caracteres por segundo, lo que equivale a cerca de 300 páginas por hora, y dispone de una memoria para cerca de 400 páginas.

Figura 3.2.10-01: Impresora Braille Índex Basic DV4

La Índex Everest es una impresora braille interpunto, utilizando hojas sueltas y disponiendo de un alimentador automático hasta al tamaño A3. Permite la impresión en formato de libro de papel y tiene una velocidad de impresión de 100 caracteres por segundo. Nótese que, mientras que el modelo Basic es horizontal, la Everest, tal como la figura siguiente muestra[105], es un modelo vertical.

Figura 3.2.10-02: Impresora Braille Everest V4

[104] INDEXBRAILLE (2013).
[105] INDEXBRAILLE (2013a).

La impresora, que tiene una memoria de 400 000 caracteres, dispone de un panel de control en braille, con voz digitalizada en simultáneo. Físicamente, tiene las dimensiones 56,3 cm × 17,5 cm × 43,3 cm y pesa 10,4 kg.

3.2.11 - Máquinas de Relieves

En una fotocopia normal los caracteres y/o figuras son percibidas por las personas normovisuales a través del sistema visual. Para que las personas ciegas tengan acceso a la información equivalente fueron concebidos documentos en relieve en que los caracteres y/o las figuras, sean analizadas bien por el sistema visual, o a través del tacto. Para el efecto, a partir de una fotocopia o impresión a láser realizada sobre papel térmico, una máquina de relieves hace hinchar el papel en las zonas donde hay tóner de la impresora o fotocopiadora, conformando, así los caracteres y/o figuras detectables al tacto.

Una de esas máquinas de relieves es la PIAF, de la empresa Quantum Tecnology, Ltd, que está representada en la figura siguiente.

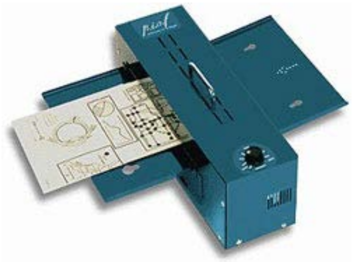


Figura 3.2.11-01: Máquina de relieves Piaf.

Otra máquina, complementaria de la anterior, o de otra equivalente, es la IVEO de la ViewPlus, pues dispone de un tablero donde se colocan las hojas térmicas con los relieves, permitiendo que se asocie cada relieve a una descripción sonora del mismo.

Figura 3.2.11-02: Sistema IVEO.

3.2.12 - Impresoras 3D

Las impresoras 3D, al permitir la construcción de objetos tridimensionales, pueden ser de extraordinaria utilidad para la enseñanza de las personas ciegas.

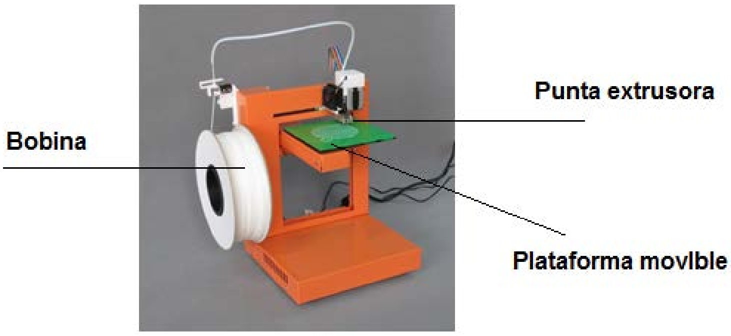


Figura 3.2.12-01: Impresora 3D.

En términos generales, la construcción de los objectos tridimensionales ocurre en tres pasos denominados de modelación, impresión y acabamientos.

En el primer paso se realiza un modelo digital del objeto a construir. A este propósito, a través de un programa adecuado, se hace un dibujo a tres dimensiones del objeto deseado. Después, este dibujo es transferido al software existente en la impresora, donde es dividido en camadas de hasta 0,1 mm, cada una de ellas.

Después, la impresión es hecha con material adecuado, como caucho, plástico o resina, que se envuelve, previamente, en forma de una bobina y es colocado en el exterior de la impresora. El material está conectado a un extrusor, donde se funde a la temperatura conveniente y es proyectado a una plataforma existente en la impresora.

Según el diseño previamente elaborado el material es proyectado para obtener una primera camada que endurece rápidamente formando, así, la base del objeto a construir. En seguida construyese una nueva camada sobre la primera y el proceso se repite hasta que están definidas todas las camadas inherentes a la construcción del objeto.

Finalmente, en el último paso, el objeto está sujeto a una fase periodo de pulimiento para eliminar las rebabas. Debe enfatizarse que hay impresoras que, por su alta calidad, no precisan este tercer paso.

Como curiosidad refiero que en el sitio de la INTERNET de la DECO[106] se hace referencia a que ya está disponible en el mercado, una de las primeras impresoras 3D, la MakerBot2[107], a un costo de unos 1800 euros, que utiliza el plástico llamado PLA (ácido poliláctico), derivado del maíz, pesando cada rollo de material cerca de 1 Kg. Esta impresora ofrece un software libre, el MakerWare, que permite la importación de modelos hechos en CAD.

Debemos de decir, también por curiosidad, que en un artículo de Jorge Pérez, el 06 de septiembre de 2014, en un portal español titulado Impramalia 3D, y dedicado a la impresión 3D, se indica que la impresora 3D Beeverycreative, fabricada por la empresa portuguesa Beeverycreative[108], durante la celebración del 3D Printshow de Londres, realizado en los días 4 a 6 de septiembre 2014, fue considerada por el público como la mejor impresora 3D, sea de uso doméstico sea de uso profesional.

3.2.13 - Teléfonos móviles

Las empresas de telecomunicaciones PT- Portugal Telecom y Vodafone proporcionan, gratuitamente, a sus clientes, ciegos o ambliopes, una aplicación denominada "Talks & Zooms". Esta aplicación permite al usuario, a través de un sintetizador de voz, obtener informaciones sonoras relativas a las funcionalidades que los teléfonos móviles ponen a nuestra disposición.

Para las personas ambliopes, más allá de disponer de la información en términos sonoros, tal como acontece para las personas ciegas, el software permite aumentar, significativamente, los caracteres y/o las imágenes que surgen en la pantalla.

[106] DECO – Asociación Portuguesa para la defensa del consumidor.
[107] DECO.PROTESTE.PT (2013).
[108] La empresa Beeverycreative tiene su sede en Gafanha d'Aquém, uña pequeña localidad del municipio de Ílhavo.

Aún para las personas ambliopes, refiérase que, en los teléfonos móviles más simples, las etiquetas de las teclas tienen una dimensión significativamente mayor de las de los teléfonos móviles utilizados por las personas normovisuales.

Dada la extraordinaria velocidad como evolucionan los equipamientos de transmisión y recepción de datos, no será extraño que, en un futuro, relativamente próximo, surjan en el mercado equipamientos específicos para personas ciegas donde la pantalla contemple dos zonas con caracteres en relieve, una para lectura y otra para escritura, de modo que permita que los usuarios tengan una excelente interacción con el equipamiento. En este ámbito es interesante el equipamiento concebido por el designer Zhenwei You[109] y al cual se refiere la figura siguiente.

Figura 3.2.13-01: Equipamiento concebido por el *designer* Zhenwei You

Este teléfono móvil está provisto de un sistema de reconocimiento de voz y posee una pantalla táctil que posibilita la obtención de la información en braille. Además de eso, es interesante referir que el equipamiento ofrece la posibilidad de

- lectura de *e-books* sea, en braille, a través de la pantalla táctil, sea en sonido, vía sintetizador de voz;
- actuar como sistema de reconocimiento de objetos;
- a través de un scanner, funcionar como máquina de lectura.

[109] TECHZINE (2013).

3.2.14 - Ampliadores

Los ampliadores son programas de software, especialmente concebidos para aumentar los caracteres y/o las imágenes de modo que las personas con baja visión, utilizando su resto visual, tengan acceso a la información disponible en la pantalla de un ordenador. Estos programas, más allá de ampliar partes seleccionadas de la pantalla, tienen también la capacidad de proceder a las alteraciones de las partes seleccionadas tales como, por ejemplo, el color, el tamaño y la forma.

Hoy en día, el sistema operativo más divulgado a nivel mundial, Microsoft Windows, integra, él mismo, un utilitario con funciones de ampliador destinado a las personas con deficiencias visuales ligeras. Se trata de la Lupa o Magnifier que permite que se cree, en la pantalla del ordenador, una ventana separada, mostrando una parte de la pantalla debidamente ampliada, ventana esta que puede ser redimensionada y/o arrastrada, dentro de los límites de la pantalla, para el lugar que el usuario entienda por más conveniente, o aún ocupar la pantalla entera. El utilitario permite también alterar el esquema de colores, proporcionando así un conjunto mínimo de facilidades.

3.2.15 - Dispositivos reconocedores de monedas y de billetes

En esta sección son presentados dos dispositivos, que incluyen poca tecnología, pero mucha imaginación, y que posibilitan que una persona ciega identifique una nota o una moneda, referentes a la zona del euro.

El primer dispositivo, concebido en colaboración entre la ACAPO[110] y la *Imprensa Nacional Casa da Moeda*, y producido por la empresa Herdmar, ubicada en Guimarães, es de utilización muy simple: se dobla una nota al medio de modo que la zona por donde se dobla la nota coincida con la arista del dispositivo referido en la figura siguiente.

[110] Associação de Cegos e Amblíopes de Portugal.

Figura 3.2.15-01: Dispositivo para reconocimiento de billetes

Después se analiza, en la parte opuesta a la zona donde se dobla, cual es la posición alcanzada por la nota. Como ejemplo, se presenta en la figura siguiente, como se reconoce una nota de 5 euros.

Figura 3.2.15-02: Reconocimiento de un billete de 5 euros

Para el reconocimiento de monedas se presenta un segundo dispositivo, de responsabilidad del Banco Central Europeo. En él, una moneda es introducida en una zona encuadrada por das líneas en relieve que se van acercando una a la otra. Donde la moneda para se realiza la lectura táctil de su valor facial.

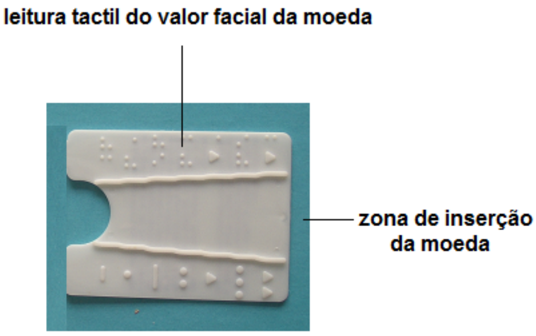


Figura 3.2.15-03: Dispositivo para reconocimiento de monedas

Como ejemplo se presenta, en la figura siguiente, el reconocimiento de una moneda de 50 céntimos.

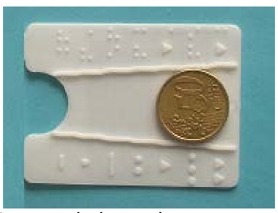


Figura 3.2.15-04: Reconocimiento de una moneda de 50 céntimos.

3.3 - TIFLOTECNOLOGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

3.3.1 - El Editor Matemático LAMBDA

El Editor Matemático LAMBDA resultó de un proyecto europeo denominado Proyecto LAMBDA (Linear Acess to Mathematics For Braille Devices and Audio-synthesis), iniciado en 2003, liderado por Italia, y en el cual Portugal participó, representado por la ACAPO (Asociación de Ciegos y Ambliopes de Portugal).

Con el Editor Matemático LAMBDA las personas con necesidades visuales pueden escribir, leer y manipular expresiones pudiendo, en ellas, ser estructurados los símbolos matemáticos espacialmente según su naturaleza.

Con el LAMBDA, al editarse una expresión, la información pasada para un lector de pantalla como, por ejemplo, el Jaws, ya permite la verbalización de los símbolos matemáticos de forma correcta. Así, por ejemplo, la expresión “2^5”, que significa $2^5=32$, es leída “2 elevado a 5” y no “2 circunflejo 5”, tal como sucede cuando se utiliza, en la elaboración de documentos, los editores de texto usuales.

El editor LAMBDA está concebido, para, por ejemplo, en una potencia hacerse la distinción entre base y exponente, o, como otros ejemplos, hacerse, en una fracción, la distinción entre el numerador y denominador, o en un pasaje al límite, distinguir la variable independiente de la variable dependiente.

El editor LAMBDA contempla la posibilidad que los símbolos surgieren en la pantalla de forma usual, para ser visionados por una persona con capacidad para hacerlo, bastando para el efecto presionar la tecla F4 y, si se desea, poder imprimirlo directamente en el papel. Si un utilizador desear imprimir en braille entonces debe presionar la tecla F2 para obtener lo pretendido. Además de eso, las expresiones escritas con el Editor LAMBDA pueden ser exportadas y calculadas, por ejemplo, a través de una calculadora compatible que esté conectada con el Editor.

Como nota, debo referir que en la acción de formación que llevé a efecto, y descripta en el capítulo 6, a pesar de mis esfuerzos, no fue posible, en tiempo útil, obtener una unidad de este programa de la entidad que en Portugal tiene la distribución de este producto. Señalo, también, que según información que me fue proporcionada por el Professor Aquilino Rodrigues, experto en tiflotecnologias, el editor LAMBDA es muy poco utilizado en Portugal.

3.3.2 - El Multiplano

El multiplano, concebido por el profesor brasileño Rubens Ferronato, es un instrumento de trabajo adecuado para la enseñanza de la matemática, especialmente de personas ciegas.

En su esencia el multiplano consiste en dos placas en acrílico: una rectangular que posee 546 punos distribuidos por 26 líneas y 21 columnas

Figura 3.3.2-01: Placa rectangular del Multiplano.

y otra circular que posee 72 puntos en su parte más exterior, distribuídos por ángulos de 5 grados, en el sistema sexagesimal, y 12 puntos en la parte interior

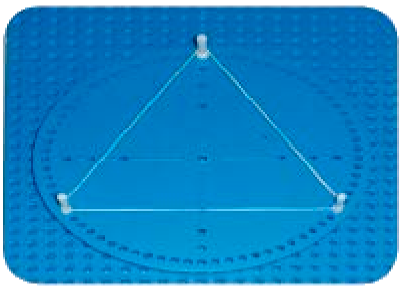


Figura 3.3.2-02: Placa circular del Multiplano.

En los puntos pueden ser insertados pasadores, eventualmente identificados en Braille, pudiendo ser conectados por gomillas (para representar, por ejemplo, una línea poligonal), astas (de diversos formatos), y barras de estadística.

En el sitio INTERNET http://www.multiplano.com.br/conteudos.html es expuesta una vasta de gamma de contenidos donde el multiplano puede ser aplicado. Tal gamma contempla, como se ha mencionado en INTERNET : operaciones, tablas de operaciones aritméticas, divisores, números primos, números cuadrados, números triangulares, raíz cuadrada, productos notables, figuras geométricas, triángulos, ángulos, elementos de una circunferencia, triángulo rectángulo inscrito, figuras regulares, dibujos de figuras geométricas y animales, figuras simétricas, mosaico, cálculo de áreas, teorema de Pick, gráficos de estadística, operaciones braille e hindú-braille, plano cartesiano, gráficos, parábolas, intervalos numéricos, inecuaciones, división de polinomios, gráfico de exponencial, cónicas, ecuaciones, matrices, fracciones, producto de fracciones, división de fracciones, sistemas lineales, pentágonos proporcionales, figuras espaciales y pirámides.

3.3.3 - Calculadora Científica SCI-PLUS 300

La calculadora científica SCI-PLUS 300, representada en la figura siguiente[111],

Figura 3.3.3-01: Calculadora científica SCI-PLUS 300.

responde a través de un sintetizador de voz, en castellano, cada vez que se presiona una cualquier tecla. Este recurso contempla una vasta gama de

[111] ANTARQ (2013).

funcionalidades entre las cuales se destacan cálculos de los ámbitos de la aritmética, álgebra, análisis (exponenciales, logarítmicos y trigonométricos) y estadística.

3.3.4 - El Cubaritmo

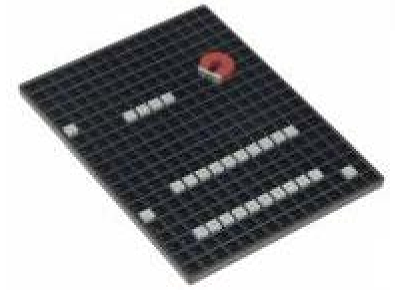


Figura 3.3.4-01: Cubaritmo

El cubaritmo es útil para las operaciones aritméticas. Consiste en un tablero rectangular, con cavidades dispuestas según una malla de 20×15 posiciones, pudiendo en cada una de las cavidades ser insertado un pequeño cubo metálico con una arista de 1 centímetro.

En una operación, los operandos son dispuestos como si de una hoja de papel se tratase y, por cada operando se utilizan tantos cubos, cuantos guarismos lo componen.

En cada cubo, cinco de las seis caras presentan puntos en relieve, en consonancia con el siguiente criterio:

- en una de las caras hay una sólo punto en relieve junto a uno de los vértices, que tanto puede significar "1" cómo ",", dependiendo si el punto en relieve queda en un vértice superior o inferior, respectivamente;

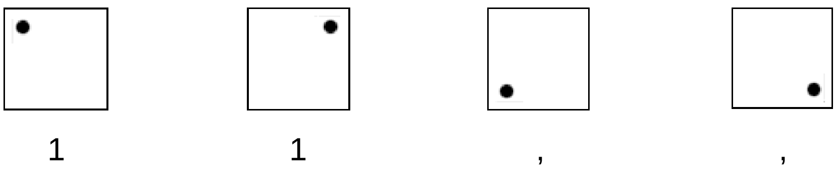


Figura 3.3.4-02: Cara del cubaritmo con un punto en relieve.

- en una segunda faz, hay dos puntos en relieve en dos vértices consecutivos, pudiendo significar “2” o “3”, si los dos puntos están en la misma posición vertical, u horizontal, respectivamente;

2 2 3 3

Figura 3.3.4-03: Cara del cubaritmo con dos puntos consecutivos en relieve.

- en una tercera cara hay dos puntos en relieve en dos vértices opuestos, pudiendo indicar “5” o “7”, conforme el punto superior se quede del lado izquierdo o del lado derecho, respectivamente;

5 7

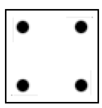
Figura 3.3.4-04: Cara del cubaritmo con dos puntos, en relieve, en diagonal.

- en una cuarta cara hay tres puntos en relieve cada uno junto a uno de los vértices, formando un ángulo recto, pudiendo reportarse al “0”, al “4”, al “6” y al “8” consonante la posición del punto que constituye el vértice de este ángulo si está en la esquina inferior derecho, esquina superior derecho, esquina superior izquierdo o esquina inferior izquierdo, respectivamente;

0 4 6 8

Figura 3.3.4-05: Cara del cubaritmo con tres puntos en relieve.

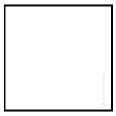
- en una quinta cara hay cuatro puntos en relieve, refiriéndose al número “7”.



7

Figura 3.3.4-06: Cara del cubaritmo con cuatro puntos, en relieve.

Finalmente, la sexta cara, sin puntos en relieve, tiene el significado que el utilizador quiera asignarle.



Tiene el significado que se queira asignarle.

Figura 3.3.4-07: Cara del cubaritmo sin puntos en relieve.

El guarismo inherente a cada cara depende, pues, del número de puntos existentes en la cara, así como del modo cómo se inserta el cubo en una de las cuadrículas de la red. Las mnemónicas fueron construidas para adaptarse, lo más posible, a la 1ª serie del sistema Braille que, recuérdese, como ya se analizó en el capítulo anterior, es la siguiente

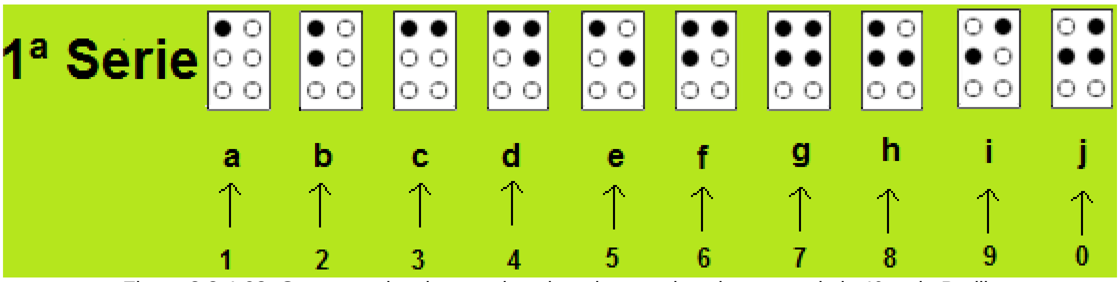
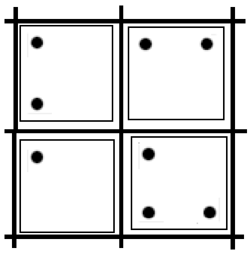


Figura 3.3.4-08: Correspondencia entre los alguarismos y los elementos de la 1ª serie Braille.

La lectura es hecha, naturalmente, analizando la cara del cubo más arriba y para retirar un cubo del tablero se utiliza un imán.

Admitamos, a título de ejemplo, que se pretendía el cálculo de 23+18. Entonces, en una línea se colocaría lo 23 y, en la otra, lo 18 como se evidencia



23

18

Figura 3.3.4-09: Ejemplo de como disponer 23+18 en el cubaritmo.

Después, el cálculo se hace cómo se fuera efectuado en una hoja de papel, produciéndose el resultado.

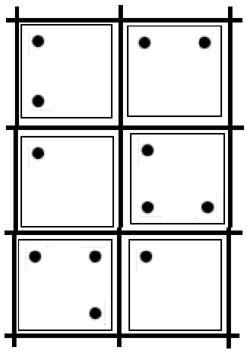


Figura 3.3.4-10: Visión parcial del cubaritmo mostrando la suma de 23 con 18.

3.3.5 - Material para Geometria

Destaco, en este ámbito, el kit de dibujo ONCE, un conjunto de transferidores y un conjunto de sólidos geométricos.

Figura 3.3.5-01: Kit de dibujo ONCE

El kit de dibujo ONCE[112] se compone de una plancha de goma (ver parte derecha de la figura anterior) y se destina a servir de soporte de las hojas, por ejemplo de papel cebolla, donde serán grabados los relieves con auxilio de dispositivos propios, como los estiletes o el compás ALYCO CIDAT (ver parte izquierda de la figura).

El compás tiene en una de las puntas un pequeño dispositivo para el fijar al papel y en la otra una pequeña rueda dentada que a medida que se hace girar esa punta del compás, la pequeña rueda dentada va marcando puntos en relieve en la hoja de papel, puntos estos que en su conjunto describirán una circunferencia, o parte de ella.

[112] ONCE es el acrónimo de Organización Nacional de Ciegos de España

El kit integra, también, una escuadra y un transferidor con marcaciones en relieve. En lo que concierne a la escuadra, dos marcas consecutivas están distanciadas de 0,5 centímetros y, en lo que concierne al transferidor, dos marcas consecutivas corresponden a un ángulo de 5 grados (sexagesimales).

Por su parte el conjunto de transferidores integra dos transferidores y contempla un ángulo completo (360 grados sexagesimales), permitiendo la medición directa de ángulos cóncavos, y otro, más usual, de 180 grados (sexagesimales). Todos los transportadores contemplan marcaciones en relieve de 5 en 5 grados (sexagesimales).

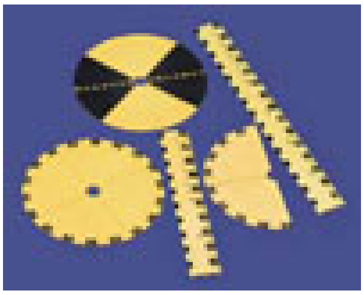


Figura 3.3.5-02: Conjunto de tres transportadores y dos reglas

Finalmente, el conjunto de sólidos geométricos integra un cubo, un prisma triangular, un prisma cuadrangular, un prisma hexagonal, una pirámide triangular, una pirámide cuadrangular, un cono y un cilindro. Todos los sólidos son en acrílico y permiten que con ellos se hagan las respectivas planificaciones, tal como se señala en la figura siguiente[113].

Figura 3.3.5-03: Conjunto de sólidos geométricas

[113] ATARAXIA (2012a).

4 - LA INCLUSIÓN ESCOLAR

4.1 - LA ERA DE LA INCLUSIÓN

La inclusión escolar de todos y, en particular de los que son portadores de necesidades educativas especiales, se fundamenta, esencialmente, en los cuatro documentos qua seguidamente destacamos.

> 1º) La Declaración Universal de los Derechos del Hombre, proclamada por la Asamblea General de la Organización de las Naciones Unidas, tres años después del fin de la segunda guerra mundial[114], más en concreto el 10 de Diciembre de 1948. De este documento, publicado en Portugal a través del Diario de la República de 9 de marzo de 1978, transcribimos:
>
> > *"…La Asamblea General proclama la presente Declaración de los Derechos del Hombre como ideal común a alcanzar por todos los pueblos y todas las naciones, con el fin de que todos los individuos y todos los órganos de la sociedad, teniendo siempre en mente esta Declaración, se esfuercen, por la enseñanza y por la educación, por desarrollar el respeto de esos derechos y libertades y por promover, por medidas progresivas de orden nacional e internacional, su reconocimiento y su aplicación universales y efectivos, tanto entre los pueblos de los propios Estados miembros como de los territorios colocados bajo su jurisdicción."*
>
> 2º) La Conferencia Mundial sobre "Educación para Todos", realizada en Jomtien, Tailandia, en 1990, y donde participaron cerca de sesenta países, evidencia que, a nivel mundial:

[114] el 2 de septiembre de 1945.

a) más de 100 millones de niños, de las cuales por lo menos 60 millones son del sexo femenino, no tienen acceso a la enseñanza primaria;

b) son analfabetos más de 960 millones de adultos, de los cuales 640 millones son mujeres;

c) más de un tercio de los adultos no tienen acceso al conocimiento impreso, a las nuevas habilidades y tecnologías;

d) más de 100 millones de niños no concluyeron el ciclo básico;

e) otros 100 millones de niños a pesar de concluirlo, no consiguen adquirir conocimientos y habilidades esenciales.

En la Declaración que indicada destacamos que su objetivo último es dar satisfacción a las necesidades básicas del aprendizaje de todos los niños, jóvenes y adultos habiendo sido elaborado, para este efecto, un Plan de Acción.

3º) La Conferencia Mundial "Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad", efectuada en Salamanca, España, en junio de 1994. En esta Conferencia, en que participaron 92 gobiernos, Portugal incluido, y 25 organizaciones internacionales, fue destacada la necesidad de que los sistemas educativos proporcionen las condiciones indispensables para acoger en su seno a todos los niños, independientemente de sus condiciones físicas, sociales u otras. Como principio fundamental de la inclusión, fue aprobado, por unanimidad, un documento, conocido por Declaración de Salamanca donde se evidencia que:

> *"…Todos los alumnos deben aprender juntos, siempre que sea posible, independientemente de las dificultades y de las diferencias que presentan. Estas escuelas deben de reconocer y satisfacer las necesidades diversas de sus alumnos, adaptándose a los varios estilos y ritmos de aprendizaje, de modo que garantice un buen nivel de educación para todos a través de currículos adecuados, de una buena organización escolar, de*

estrategias pedagógicas, de utilización de recursos y de una cooperación con las respectivas comunidades".

4º) El Congreso Internacional de Educación Especial, celebrado en Birmingham, Inglaterra, en abril de 1995, del cual transcribo[115], de una comunicación intitulada "Education Sea All: Making it happen", presentada por Miel Ainscraw del Instituto de Educación de la Universidad de Cambridge, el siguiente:

"...Durante estos cinco años, desde las conferencias de Cardiff y Jomtien, el pensamiento en lo que respecta a esta área progresó. La referencia superficial a las necesidades educativas especiales, tal como surgió a partir de las discusiones de Jomtien, fue gradualmente sustituida por el reconocimiento de que las agenciadas especiales deberían constituir un elemento esencial del esfuerzo para alcanzar una educación para todos. Así, en vez de subrayar la idea de la integración, acompañada de la persuasión de que se deben introducir medidas adicionales para responder a los alumnos especiales, en un sistema educativo que se mantiene, en sus líneas generales, inalterado, asistimos a movimientos que preven la educación inclusiva, cuyo objetivo consiste en reestructurar las escuelas, de modo que respondan a las necesidades de todos los niños. (Clark et al., 1995)"

Durante varios decenios la expresión "Educación Especial fue utilizada para designar uno tipo de educación dirigido a alumnos con alguna disfuncionalidad (como, por ejemplo, auditiva o visual) en oposición a la educación practicada en escuelas regulares, para la mayoría de los restantes alumnos considerados, estadísticamente, normales.

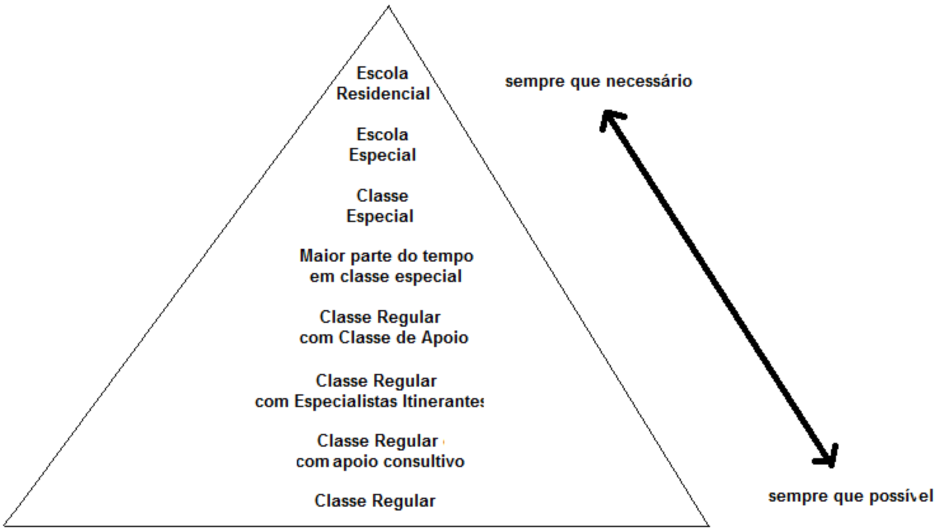
Según Birch[116] la integración escolar es un proceso que tiene por objeto unificar la educación regular y la educación especial procurando proporcionar al

[115] Traducción hecha por Ana Maria Benard da Costa, debidamente autorizada por el autor.
[116] BIRCH (1974) referido por BAUTISTA JIMÉNEZ (1993, p. 29))

mayor número de alumnos con disfuncionalidades significativas su inserción en escuelas regulares, siendo los alumnos apoyados, fuera del contexto del grupo, de forma individualizada o en pequeños grupos, de modo que puedan participar en el currículo que la escuela proporciona.

Con el objetivo de señalar la variedad de posibilidades de escolarización a alumnos con disfuncionalidades, en diferentes situaciones de educación especial, en conformidad con sus necesidades, M. Reynolds[117], en 1962, concibió uno sistema en cascada, contemplando ocho niveles que designó por:

- clase regular (el nivel de mayor integración)
- clase regular con apoyo consultivo,
- clase regular con especialista itinerante,
- clase regular con clase de apoyo,
- mayor tiempo en clase especial,
- clase especial,
- escuela especial,
- escuela residencial (el nivel de completa ausencia de integración).



[118]Figura 4.1–01: Sistema en cascada de M. Reynolds

El autor evidenció que, siempre que sea posible, la integración debería avanzar para una clase regular y que, solamente, cuando ello fuese necesario, se

[117] MONEREO (1989) referido por BAUTISTA JIMÉNEZ (1993, p. 38).
[118] Expresiones portuguesas en el interior de la figura.

debería caminar en sentido opuesto, sólo alcanzándose el nivel de escuela residencial en situación límite de no integración.

En 1978, a través del informe Warnock, se dio por primera vez la expresión "necesidades educativas especiales" siendo, después, utilizada en la Ley de la Educación de Gran Bretaña, en 1981. Tal expresión pasó a ser aplicada a alumnos que evidenciando una cualquier dificultad en el aprendizaje, significativamente mayor de la que sus compañeros del mismo nivel de edad, tengan necesidad de una medida educativa especial para sobrepasar esa dificultad[119].

La "era de la inclusión", según Deodato Guerreiro, proviene de la Conferencia Mundial de Educación para Todos" y de la Conferencia Mundial "Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Cualidad", atrás referidas. Para fundamentar su afirmación el autor[120] evidencia que

> *"…A partir del principio de la década de 90, del siglo XX, con la realización de la Conferencia Mundial de Educación para Todos", en 1990, y con la Declaración de Salamanca de Principios, Política y Práctica para las Necesidades Educativas Especiales, en 1994, entramos en la era de la inclusión", en que las exigencias no se refieren sólo al derecho de la persona con deficiencia a la integración social, sino al deber de la sociedad, como un todo, de adaptarse a las diferencias individuales…"*

Con la inclusión escolar se pretende una amplia sensibilización para con la necesidad de, en las escuelas regulares, practicar la inclusión de todos los alumnos, en particular de los que tienen necesidades educativas especiales y, en este ámbito hay, según algunos autores, un nuevo paradigma. Así, de una "perspectiva centrada en el alumno" que caracteriza el proceso de integración educativa se pasó, con la educación inclusiva, haciaa una "perspectiva

---

[119] BAUTISTA JIMÉNEZ (1993, pp. 9, 10).
[120] GUERREIRO (2011, p. 41)

centrada en el currículo"[121]. A este propósito, en la conferencia realizada en 11/12/1998, Ana Maria Bérnard da Costa[122] evidencia algunas características relativas a cada una de las perspectivas:

Perspectiva centrada en el alumno (orientación tradicional)	**Perspectiva centrada en el currículo (orientación inclusiva)**
Atención centrada en las capacidades del niño	Atención centrada en la intervención pedagógica capaz de desarrollar las capacidades de todos
Espacios Especiales y programas diferentes[123] para los alumnos con necesidades educativas especiales.	Adaptación de las estrategias de enseñanza en la sala de aula para responder a las necesidades individuales (con el apoyo que sea necesario) y teniendo en cuenta el currículo común. La dificultad del alumno es un estímulo a la mejora de la enseñanza
Intervención individualizada dirigida esencialmente a la recuperación del déficit, a cargo de especialistas	Intervención mirando al grupo y buscando asegurar la mayor eficacia para todos, a través de estrategias diversificadas

Con la inclusión escolar los Centros Educativos son invitados a adaptarse para proporcionar una adecuada educación a todos sus alumnos, en general, y a cada uno de ellos, en particular, debiendo, para este efecto, ser diseñados currículos flexibles y ser proporcionados los medios adecuados para que tales currículos sean concretizados en consonancia con lo planeado.

A los profesores es exigida, naturalmente, una mayor disponibilidad, más dedicación, mejor preparación, sea en términos científicos, sea en términos pedagógico-didácticos, para encontrar las respuestas educativas más adecuadas, para que los alumnos progresen en el currículo en consonancia con su propio ritmo. En este contexto, los profesores de educación especial son, en sí mismos, recursos muy preciosos que la Escuela coloca a la disposición de la comunidad educativa donde se inserta.

En una Escuela Inclusiva debe utilizarse un lenguaje accesible a todos y debe considerarse la diferencia no, sólo, como uno desafío sino, también, como una

[121] AINSCOW, PORTER, WANG (1997)
[122] Citada por SOARES (2011, p. 10)
[123] Programas idénticos pero, menos largos.

oportunidad para la creación de nuevas situaciones de aprendizaje[124]. Para que se pueda concretar es necesario que[125]:

- haya un liderazgo eficaz, a todos los niveles;
- en las decisiones de la escuela todos los intervinientes (profesores, funcionarios, alumnos, padres y encargados de educación) deben participar activamente;
- las planificaciones sean realizadas de modo colaborativo;
- haya estrategias de coordinación;
- sea dada gran énfasis a las actividades de investigación y a las prácticas de reflexión;
- se practique una política de valorización profesional de todo el equipo educativo.

A los alumnos con necesidades educativas especiales derivadas de la ceguera[126], además del deber de la escuela en proporcionar adecuados procesos de enseñanza/aprendizaje para la lectura y escrita del Braille, debe, también, tener en atención las vertientes:

- estimulación multisensorial,
- orientación y movilidad y
- habilidades de la vida diaria.

[124] SANCHES, Isabel & TEODORO, António (2006), citando AINSCOW (2000).
[125] SANCHES, Isabel & TEODORO, António (2006), citando AINSCOW (1995, p. 24).
[126] LÓPEZ JUSTICIA (2004, pp. 151-173).

4.2 - LA SITUACIÓN EN PORTUGAL

En este subcapítulo, dividido en dos secciones, voy a referir en líneas muy generales lo que de más significativo ocurrió en Portugal, desde la instrucción en escuelas específicas para personas ciegas, hasta a la inclusión de los alumnos con necesidades educativas especiales en establecimientos de enseñanza regular, sean oficiales, particulares o cooperativos.

4.2.1 - Los cinco periodos

El Dr. Orlando de Jesus Monteiro[127] (1931-2009), ilustre tiflólogo[128] portugués, en el Congreso "100 años de Tiflología en Portugal" organizado por el Gabinete de Referencia Cultural de la Cámara Municipal de Lisboa, los días 25 y 26 de Julio de 2004, dividió la historia de la tiflología en Portugal en cinco periodos[129]: Embrionario, del Pionerismo, de la Estabilidad Institucional, del Cambio y Político-Técnico-Jurídico.

4.2.1.1 - Periodo Embrionario (1823-1887)

Este periodo se inició en 1823, con la creación del Instituto Real de los Niños Ciegos y Sordo-Mudos y terminó con la fundación de la Asociación Promotora de la Enseñanza de los Ciegos (APEC), en 1887.

La creación del Instituto Real de los Niños Ciegos y Sordo-Mudos, en el reinado de D. João VI, a solicitud de José Antonio Freitas do Rego[130], tuvo como objetivo proporcionar educación la niños ciegos, sordos y/o sordo-mudos. La vida de esta Institución fue muy convulsa, reflejo de la gran inestabilidad política existente en el país, habiéndose extinguido en 1859.

---

[127] Presidente de las segunda y tercera Comisiones Braille.
[128] En Portugal para designar todos los aspectos inherentes a la educación de las personas ciegas se utiliza el término tiflologia.
[129] GONÇALVES DA SILVA (2007, pp. 85-86).
[130] SAMAGAIO [et al.] (2003, p. 9).

Durante este periodo, el 20 de Julio de 1863[131], por iniciativa del Doctor João Diogo J. Sequeira Sameiro, fue creado, en Castillo de Vide, en el distrito de Portalegre, el Asilo Nuestra Señora de la Esperanza, con el objetivo de proporcionar a las personas ciegas y ambliopes de ambos sexos, inicialmente, alimentación y cama y, posteriormente, también instrucción contemplando la enseñanza del braille, conceptos fundamentales de aritmética y nociones básicas de francés, debiéndose destacar que esta última faceta se debió a la iniciativa del Padre Severino Dinis Puerto, de un profesor normovisual y de dos jóvenes educadas en el Instituto Nacional para Jóvenes Ciegos de París.

También, en lo relativo al Asilo Nuestra Señora de la Esperanza, indico que, siempre por iniciativa del Padre Severino Dinis Puerto, se proporcionó más instrucción a los educandos de tal modo que, algunos alumnos hicieron sus exámenes, en el ámbito de la enseñanza media, en el liceo de Portalegre.

También en esta institución fueron creados los primeros talleres para personas ciegas en Portugal, por iniciativa de Antonio Repenicado[132] y José Cándido Blanco Rodrigues[133], ocupando este último un papel de gran importancia en la historia de la tiflología en Portugal y que tiene su nombre, inclusive, en la toponimia de la ciudad de Lisboa.

En 1887 fue fundada la Asociación Fiscal de la Enseñanza de los Ciegos (APEC), ya mencionada, con el objetivo de crear escuelas para la enseñanza de personas ciegas, en diversas ciudades del país.

4.2.1.2 - Periodo del Pionerismo (1888-1926)

En 1888 con la creación por la APEC, en Pedrouços en su primera (y única) Escuela, se inició el Periodo del Pionerismo. En este periodo, por iniciativa de Blanco Rodrigues fue consagrada, en 22 de Diciembre de 1894, la oficialización de la enseñanza de las personas ciegas, y, también por su iniciativa, fueron creados el Asilo de Ciegos de S. Manuel (1899), en Porto, el

[131] MONTORO (1992, p.608).
[132] GUERRINHA, Dalila. (2004. p. 393).
[133] GONÇALVES DA SILVA (2007, pp. 91- 94).

Instituto de Ciegos Branco Rodrigues (1900), en Lisboa, y la Escuela de Ciegos Blanco Rodrigues (1903), en Porto.

Durante este periodo Portugal sufrió cambios políticos muy profundos. En 5 de Octubre de 1910 fue se instauró la República y durante casi dos décadas el país vivió gran inestabilidad política. Sin embargo de 1914 - 18 ocurrió la primera gran guerra mundial, en que Portugal participó, lo que tuvo, obviamente, gran impacto en el país.

En 18 de Octubre de 1926 falleció Blanco Rodrigues.

4.2.1.3 - Periodo de la Estabilidad Institucional (1927-1958)

Al inicio de este período, cerca de 4 años después de la muerte de Blanco Rodrigues, precisamente en 22 de Mayo de 1930, a través del Decreto nº 18 373, fue aprobado el método de lectura y escritura del sistema braille para ser utilizado por las personas ciegas, en conformidad con la ortografía oficial existente en la época, tal como ya fue destacado en la sección 2.5.2.

Este periodo es caracterizado por la existencia de instituciones, que generalmente en régimen de internado, proporcionaban una adecuada formación a los alumnos ciegos, para después efectuar, en las escuelas públicas, los exámenes oficiales. En esas instituciones, que para su regular funcionamiento, contaban con el apoyo de entidades oficiales, se proporcionaba también, de forma muy sólida, la enseñanza del braille.

Durante este periodo se destacó la figura del profesor Albuquerque y Castro gran impulsor de las bases científicas de la tiflología y que vendría a presidir la primera Comisión de Braille a la cual perteneció, también, el Dr. Orlando Monteiro.

Como nota interesante refiérase, también, que en este periodo se licenció por primera vez una persona ciega en Portugal. Tal hecho ocurrió en 1954, y fue su protagonista Augusto Roque Medina de Silva[134], caboverdiano de nacimiento, que se licenció en filologías románicas y germánicas

4.2.1.4 - Periodo del Cambio (1958-1971)

Este periodo se inicia con el paso a carácter permanente de la Comisión de Braille, que sin embargo había sido creada y concluye con la aprobación, en 1971, de la Primera Ley de Bases de la Rehabilitación.

En este periodo ocurrió una experiencia de gran significado: cinco alumnos ciegos del Centro Helen Keller, que frecuentaban el antiguo 4º año del curso del liceo, fueron integrados en un grupo del Liceo Passos Manuel, en Lisboa, gracias a la iniciativa conjunta de la entonces Directora Pedagógica de aquel Centro, la Dra. Ana Maria Bénard de la Costa, y del Rector del referido Liceo, el Profesor Diamantino Augusto de la Costa Soares. En esta iniciativa, el Rector atribuyó un horario/semanal de 9 horas lectivas a la profesora Ana Maria para apoyar los alumnos ciegos. Esta fue la primera experiencia de integración en Portugal, coronada de enorme éxito. A partir de ahí se realizaron nuevas experiencias como la del Liceo Rodrigues de Freitas, en Porto, y en la Escuela Antonio Arroyo, en Lisboa. Incluso personas ciegas se inician en la actividad docente como por ejemplo, el propio Dr. Orlando de Jesús Monteiro.

4.2.1.5 - Periodo Político-Técnico-Jurídico (desde 1971)

En este periodo que se caracteriza por, en los planes político, técnico y jurídico se den transformaciones muy significativas, se asiste, también, al surgimiento de las tiflotecnologías de la información y de la comunicación que están en la base de la segunda revolución[135] en el que concierne al acceso a la información por parte de las personas ciegas, tal como se ha explicado.

De un conjunto muy significativo de documentos legislativos, a los que hacemos alusión, destaco la Primera Ley de Bases de la Rehabilitación, la

[134] GONÇALVESDA SILVA (2007, p. 85).
[135] La primera revolución, tal como ya se ha indicado ocurrió con la creación del Sistema Braille.

Constitución de la República Portuguesa, la Ley de Bases del Sistema Educativo, la Ley 319/91, relativa a la integración de todos los alumnos y la Ley 3/2008, relativa a la creación de escuelas de referencia que serán reflejadas, también, en la próxima sección de este subcapítulo.

La Primera Ley de Bases de la Rehabilitación, fue decretada en de 8 de Noviembre de 1971, y tenía como objetivo la integración de los alumnos portadores de deficiencia visual en gupos de establecimientos de enseñanza oficial para tener las clases con los demás alumnos.

En 1973, con la reforma de Veiga Simão, ministro de la educación de 1970/74, fue creado por primera vez un departamento conectado a la Enseñanza Especial en el Ministerio bajo su tutela.

En el ámbito de la Primera Ley de Bases de Rehabilitación, tuve ocasión de impartir un grupo, del 7º año de escolaridad en la cual estaba integrado un alumno ciego. Tal ocurrió el año lectivo de 1976/77, cuando hice estancia pedagógica como docente de matemática, en la antigua Escuela Comercial e Industrial de Santarém. Debo referir que, en aquella ocasión, no me fue proporcionada formación adicional para lidiar con esa realidad, pero como es típico de la generalidad de los portugueses, me adapté con facilidad a esa situación. Destaco, sin embargo, que el alumno en cuestión, después de las clases, mantenía contacto, con alguna regularidad, con un profesor perteneciente a los cuadros de la enseñanza especial del Ministerio de Educación para enseñarle braille y efectuar la transcripción de documentos (apuntes y pruebas de evaluación) para braille y viceversa.

También en el año de 1976, más concretamente el día 2 de Abril, fue aprobada la Constitución de la República Portuguesa. Se trataba de un documento de extraordinaria importancia, pues constituye la base fundamental en la que se soporta todo el sistema jurídico portugués. De ese documento, transcribo dos artículos que evidencian de una forma muy explícita que, en nuestro país, se debía procurar la inclusión de todos los ciudadanos.

*“... **Artículo 71.º (Ciudadanos portadores de deficiencia)***

***1**. Los ciudadanos portadores de deficiencia física o mental gozan plenamente de los derechos y están sujetos a los deberes consignados en la Constitución, con excepción del ejercicio o del cumplimiento de aquellos para los cuales se encuentren incapacitados.*
***2.** El Estado se obliga a realizar una política nacional de prevención y de tratamiento, rehabilitación e integración de los ciudadanos portadores de deficiencia y de apoyo a sus familias, a desarrollar una pedagogía que sensibilice a la sociedad en cuanto a los deberes de respeto y solidaridad para con ellos y a asumir el gravamen de la efectiva realización de sus derechos, sin perjuicio de los derechos y deberes de los padres o tutores.*
***3**. El Estado apoya las organizaciones de ciudadanos con deficiencias.*

*“...**Artículo 73.º (Educación, cultura y ciencia)***

***1.** Todos tienen derecho a la educación y a la cultura.*
***2**. El Estado promueve la democratización de la educación y las demás condiciones para que la educación, realizada a través de la escuela y de otros medios formativos, contribuya a la igualdad de oportunidades, la superación de las desigualdades económicas, sociales y culturales, el desarrollo de la personalidad y del espíritu de tolerancia, de comprensión mutua, de solidaridad y de responsabilidad, para el progreso social y para la participación democrática en la vida colectiva.*
***3**. El Estado promueve la democratización de la cultura, incentivando y asegurando el acceso de todos los ciudadanos a la fruición y creación cultural, en colaboración con los órganos de comunicación social, las asociaciones y fundaciones de fines culturales, las colectividades de cultura y ocio, las asociaciones de defensa del patrimonio cultural, las organizaciones de ciudadanos y otros agentes culturales.”*

Posteriormente, a través de la Ley nº 46/86 de 14 de Octubre, denominada Ley de Bases del Sistema Educativo, se manifiesta el propósito educativo de proporcionar la formación integral de todos los portugueses, debiendo atribuirse al Estado la responsabilidad y el deber de democratizar la enseñanza y del que hacer más justo.

A propósito de las intenciones referidas en el párrafo anterior, es siempre útil recordar que el Estado no es una entidad abstracta sino, la nación organizada políticamente por lo que, al exigirse al Estado el deber de democratizar la enseñanza y del que hacer más justo, ello implica que todos los que participan en el sistema educativo, de forma directa o indirecta (agentes políticos, padres/encargados de educación, profesores y alumnos) tengan un comportamiento responsable.

En 1991, a través de la ley 319/91 de 23 de Agosto, surgió por primera vez la expresión “necesidades educativas especiales”. En este documento se atribuye a la Escuela la responsabilidad de garantizar la integración de todos los alumnos, no sólo los que necesitan de un apoyo educativo especial sino que también, los que, en algún momento, presenten dificultades en el aprendizaje.

En 30 de mayo de 1997, por despacho conjunto nº 105/97, es aprobado un encuadramiento global para los apoyos educativos, por el que el gobierno delega en las escuelas de la enseñanza regular, no superior, la responsabilidad de cada una de ellas

> “…*contribuir a* l*a igualdad de oportunidades de éxito educativo para todos los niños y jóvenes, promoviendo la existencia de respuestas pedagógicas diversificadas adecuadas a sus necesidades específicas y a su desarrollo global, respuestas adecuadas a las necesidades educativas de los alumnos*”

y de

> “…*promover la existencia de condiciones para la integración socio educativa de los niños y jóvenes con necesidades educativas especiales”.*

Cuatro años después, más precisamente en 18 de enero de 2001, a través del Decreto-Ley 6/2001, las entidades superiores. teniendo en cuenta la promoción de una escuela democrática y de calidad, han definido que cada centro educativo debería elaborar un proyecto apropiado, de modo que adapten el currículo nacional al medio en que el estabelecimiento de enseñanza está insertado.

Para concluir esta sección hago constar que, en Portugal, por iniciativa de un grupo de ciudadanos, de los cuales se destaca la figura de Ana Maria Bernard da Costa, ya anteriormente señalada en este capítulo, fue creado el Proyecto REDEinclusão[136], directamente inspirado en los valores, principios y estrategias de actuación de la organización Enabling Education Network, procurando desarrollo de la inclusión educativa y social de los niños y jóvenes en situación de vulnerabilidad, o marginalización, en los países de lengua oficial portuguesa: Portugal, Angola, Moçambique, Cabo Verde, S. Tomé y Príncipe, Guinea y Timor.

Nótese también, que en la prosecución de sus actividades el Proyecto REDEInclusão tiene el apoyo de la Fundación Calouste Gulbenkian, de la Universidad de Aveiro, de la Enabling Education Network, de la UNESCO y del Centre for Studies in Inclusive Education (CSIE).

4.2.2 - Escuelas de referencia para la educación de alumnos con necesidades visuales

La Ley 3/2008, de 7 de Enero, estableció la creación de una red de Escuelas de Referencia con el objetivo de proporcionar la inclusión de los alumnos ciegos y los de baja visión. En cada una de estas Escuelas deberán ser concentrados medios humanos y materiales de forma que se proporcione un apoyo educativo eficaz a los alumnos con necesidades educativas visuales. En el ámbito de este apoyo se debe prestar atención a los aspectos que a continuación se transcriben de su artículo 24º:

[136] REDEINCLUSÃO (s/d).

"… *a) Asegurar la observación y evaluación visual y funcional;*

b) Asegurar la enseñanza y el aprendizaje de la lectura y escritura de Braille así como de sus diversas grafías y dominios de aplicación;

c) Asegurar la utilización de medios informáticos específicos (líneas Braille, impresoras Braille, etc.);

d) Asegurar el entrenamiento visual específico;

e) Orientar los alumnos en las disciplinas en que las limitaciones visuales ocasionen dificultades particulares (educación visual, educación física, etc.);

f) Asegurar el acompañamiento psicológico y la orientación vocacional."

De las cinco Direcciones Regionales de Educación existentes en el continente (Norte, Centro. Lisboa y Valle de Tejo, Alentejo y Algarve) la red, en un conjunto de 27 Escuelas, sólo no contempla la Dirección Regional de Algarve. En lo que respeta a las Regiones Autónomas de Açores y de Madeira será de responsabilidad de los respectivos gobiernos regionales la implementación de tales Escuelas.

La lista de las 53 escuelas de referencia, que constituyen una red con vistas a satisfacer las necesidades educativas visuales de los estudiantes de la parte continental del país, es la siguiente:

<u>Dirección Regional del Norte (DREN)</u>

Viana do Castelo

Agrupación de Escuelas de la Abelheira

Escuela Secundaria de Monserrate

Braga

Agrupación de Escuelas Oeste de la Colina

Escuela Secundaria Carlos Amarante

Penafiel

Agrupación de Escuelas Penafiel Sul

Escuela Secundaria c/ 3º Ciclo Joaquim Araújo

Porto

Agrupación de Escuelas Gomes Teixeira

Escuela Secundaria Rodrigues de Freitas

Vila Real

Agrupación de Escuelas Diogo Perro

Escuela Secundaria c/ 3º Ciclo Camilo Castelo Branco

Bragança

Agrupación de Escuelas Augusto Moreno

Escuela Secundaria c/ 3º Ciclo de Emídio Garcia

Dirección Regional del Centro (DREC)

Aveiro

Agrupación de Escuelas de Aveiro

Escuela Secundaria José Estevão

Viseu

Agrupación de Escuelas Grano Vasco

Escuela Secundaria Emídio Navarro

Guardia

Agrupación de Escuelas de Sequeira

Escuela Secundaria c/ 3º Ciclo de la Sé

Coimbra

Agrupación de Escuelas Poeta Silva Gaio

Escuela Secundaria Infanta D. Maria

Castelo Branco

Agrupación de Escuelas João Roiz

Escuela Secundaria Amato Lusitano

Leiria

Agrupación de Escuelas José Saraiva

Escuela Secundaria Afonso Lopes Vieira

Dirección Regional de Lisboa e Vale de Tejo (DRELVT)

Lisboa

Agrupación de Escuelas Olaias

Escuela Secundaria Maria Amália Vaz de Carvalho

Loures

Agrupación de Escuelas nº1de Loures

Escuela Secundaria con 3º Ciclo Dr. António Carvalho Figueiredo

Caldas de Rainha

Agrupaciones de Escuelas D. João II

Escuela Secundaria Raul Proença

Cascais

Agrupación de Escuelas Alapraia

Escuela Secundaria S. João de Estoril

Sintra

Agrupación de Escuelas Río de Mouro/Padre Alberto Neto

Escuela Secundaria con 3º Ciclo Ferreira Días

Torres Vedras

Agrupaciones de Escuelas Padre Vítor Melícias

Escuela Secundaria Henriques Nogueira

Entroncamento

Agrupaciones de Escuelas Ruy de Andrade

Escuela Secundaria del Entroncamento

Benavente

Agrupación de Escuelas Duarte Lopes

Escuela Secundaria de Benavente

Santarém

Agrupación de Escuelas D. João II

Escuela Secundaria con 3º Ciclo Dr. Ginestal Machado

Almada

Agrupaciones de Escuelas Alembrança

Escuela Secundaria c/ 3º ciclo Romeu Correa

Dirección Regional de Alentejo (DREAL)

Beja

Agrupamento de Escolas nº 2 - EBI Mário Beirão

Évora

Agrupamento de Escolas nº 2 - EBI de André Resende

Portalegre

Agrupamento de Escolas nº 2 - EB 2,3 Cristóvão Falcão

En estas escuelas son concentrados los alumnos de uno o más municipios, en función de su localización y de la red de transportes que tienen a su disposición.

Como la red no contempla todo el territorio del continente, como es, por ejemplo, el caso de Algarve, los alumnos de esta región, con necesidades educativas visuales, si quisieran beneficiarse de las ventajas proporcionadas por una de las Escuelas de Referencia, tendrán que desplazarse de su área de residencia, durante los periodos lectivos, y encontrar alojamiento junto a una de las Escuelas de referencia de la red nacional. Tal hecho constituye claramente un gran trastorno, tanto para el alumno como para su familia.

Para obviar el inconveniente referido en el párrafo anterior, debe la Escuela del área de residencia del alumno pertrecharse, en la medida del posible, de los medios necesarios o, alternativamente, investigar si existe alguna biblioteca municipal que disponga de equipamientos tiflotecnológicos[137] y, en caso afirmativo, con miras a salvaguardar los intereses del alumno, solicitar la elaboración de un protocolo de colaboración con la biblioteca en cuestión.

Para el ejemplo presentado, sobre el Algarve, en investigación[138] que llevé a efecto, (2005-2007), constaté que de los doce municipios de Algarve, dos de ellos poseían, en sus bibliotecas principales, equipamiento informático específico, contemplando inclusive el acceso a la INTERNET, sin embargo, sólo una de ellas poseía un técnico especializado en el apoyo la personas con necesidades visuales.

---

[137] La expresión “tiflotecnologia” , tal como ya fue referido en el subcapítulo 3.2, resulta de la concatenación del término “tiflo”, relacionando persona ciega y tecnología,

[138] GONÇALVES DA SILVA (2007, pp. 351-354).

4.3 - UNA EXPERIENCIA PERSONAL

Durante el bienio lectivo de 1992-1994 desempeñé las funciones de Presidente del Consejo Directivo de la Escuela Secundaria de Gago Coutinho, en Alverca del Ribatejo, en el municipio de Vila Franca de Xira. Se trataba, en aquella ocasión, de un establecimiento de enseñanza con cerca de 3300 alumnos, 2500 frecuentaban cursos diurnos y los restantes en régimen nocturno, cerca de 180 profesores y cerca de 100 funcionarios (administrativos y auxiliares de educación).

A algunos meses del término de mi mandato, constaté la necesidad de dotar a la Escuela de más de un funcionario para ejercer funciones de vigilante nocturno y, en esa ocasión, tuve la oportunidad de asistir, en el pabellón deportivo de la Escuela, a un juego de baloncesto, en que los jugadores eran parapléjicos y se desplazaban en silla de ruedas.

Dado que la Escuela se sitúa en terreno plano, me surgió la idea de que podría ser útil, en términos educativos, por el ejemplo que tal podría proporcionar, realizar la vigilancia de la Escuela, por la noche, por medio de una persona parapléjica, que tenía a su disposición una silla de ruedas eléctrica y auxiliada por dos perros.

Yo tenía la plena convicción de que el equipo (persona parapléjica y los dos perros) jercerían sus funciones con gran éxito. Contacté, entonces con las entidades superiores (Dirección Regional de Educación de Lisboa) que, para mi gran satisfacción, autorizaron el reclutamiento de un funcionario en las condiciones por mí referidas. Contacté, luego, con el Centro de Empleo y Formación Profesional de Vila Franca de Xira que me indicó, algún tiempo después, a una persona que al hacer el mantenimiento de un avión, cerca de un año antes, en el Aeropuerto de Lisboa, cayó de una ala habiendo quedado paralizado de los miembros inferiores.

Mandé edificar una perrera con buenas condiciones y adquirí dos perros cachorros de raza Sierra de la Estrella. Por su parte, el Centro de Empleo y

Formación Profesional de Vila Franca de Xira compró una silla de ruedas eléctrica para la persona parapléjica que había seleccionado.

Sin embargo mi mandato llegó a su término. Para que todo corriera bien yo tuve la preocupación de llevar conmigo, a las reuniones con el Centro de Empleo y Formación Profesional de Vila Franca de Xira, al compañero que iría a sucederme. Pero, algunos días después de la toma de posesión del nuevo equipo directivo, constaté que el proyecto había quedado sin efecto, pues al Centro de Empleo y Formación Profesional de Vila Franca de Xira le fue comunicado que la Escuela ya no estaba interesada en la contratación de la persona parapléjica.

Aún hoy, es mi convicción que se perdió una excelente oportunidad de dar a la comunidad educativa, en general, y a los alumnos en particular, un buen ejemplo de inclusión.

La experiencia personal que acabo de describir, ocurrió hace casi 20 años. Ella evidencia que la inclusión, más allá de adecuada legislación que le dé soporte exige, sobre todo, una revolución en las mentalidades de aquellos que a tienen que llevarla a la práctica. Felizmente, en la actualidad, ya son muchos los relatos en que los procesos de inclusión tienen éxito.

4.4 - LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

No hay ninguno ramo de la Matemática, por más abstracto que sea, que no pueda vaya a ser aplicado, más pronto o más tarde, a los fenómenos del mundo real

Lobachevsky

Tal como tuve oportunidad de evidenciar en el capítulo inicial, la Matemática, como la Lengua Materna, son por excelencia áreas estructurales del saber ya que, la adquisición de conocimientos y de cualificaciones en estas áreas, eleva, de forma muy significativa, el potencial para la adquisición de nuevos aprendizajes, no solamente en estas áreas sino también, en otros dominios del conocimiento.

La Matemática al ser utilizada, sea como lenguaje comunicacional en muchos dominios del saber, sea en la estructuración de nuestras ideas sobre el mundo físico que nos rodea, o bien también, en la modelación de fenómenos de este mismo mundo, puede desempeñar un papel fundamental en el crecimiento intelectual de cualquier ciudadano.

Inequívocamente, la Matemática forma parte integrante del patrimonio cultural de la humanidad, por lo que cada profesor deberá de tener la permanente preocupación de proporcionar a sus alumnos los estímulos entendidos por más convenientes para que ellos tengan acceso a ese patrimonio.

En los procesos de enseñanza/aprendizaje se deberá tener en cuenta que el aprendizaje de la Matemática se hace de forma progresiva, escalón a escalón. Por ello y, en primer lugar, deberá tenerse la preocupación de asegurar que los alumnos dominen los conceptos básicos de Matemática que son utilizados en la vida cotidiana y, después, de forma gradual, deberán ser proporcionados los conocimientos indispensables para vuelos más altos. Prestar atención al que, para que la adquisición de conocimientos se procese de forma consistente, el profesor deberá tener la preocupación de:

- hacer un encuadramiento histórico inherente a la evolución de tales conceptos;
- referir realidades concretas (sea en la naturaleza, en la ciencia, en la tecnología, en el arte o en la vida del día a día) donde esos conceptos sean aplicados;
- incentivar en los alumnos el gusto por el análisis crítico de los fenómenos del mundo real que, el día a día, va revelando, la utilidad de los conocimientos matemáticos adquiridos;
- estimular a sus alumnos en la práctica de técnicas de argumentación y de demostración.

Para un desempeño adecuado de sus funciones, el profesor de matemática, más allá de tener en cuenta informarse sobre lo que de más relevante ocurre diariamente en la sociedad en que está insertado, deberá de tener la constante preocupación de actualizar sus conocimientos, y confrontarlos con los de sus semejantes en lo que se refiere:

- a las áreas de la Matemática que imparte,
- a la Historia de la Matemática,
- a la Lengua Materna,
- a la Didáctica,
- a la Pedagogía y
- a la Gestión del Currículo.

Para los alumnos con necesidades educativas visuales, el profesor deberá tener el cuidado de proporcionarles, en tiempo real, la información que se proporciona a los restantes alumnos, sea a través de una oralidad tan completa cuanto posible, sea a través de materiales pedagógico-didácticos convenientes.

En lo que respecta a la necesidad de tener una oralidad tan completa como sea posible, por su interés[139], transcribo lo siguiente:

[139] GUERREIRO (2011, p. 41).

"… Si se habla a una persona ciega de un arco-iris, deberá captar, con la máxima exactitud, lo que es eso; si le hablan de una mujer bonita, o de un hombre bonito, lindo de un paisaje deslumbrante, deberá saber lo que eso significa, en el contexto de bonito, lindo, admirable, deslumbrante; y para mostrar y demostrar todo lo que sólo es posible ver con los ojos, sin tocar, se necesita una muy gran imaginación y una sólida cultura para "ver" tocando, lo que sólo es permitido ver sin tocar."

Finalmente, en el que respeta a los materiales didáctico-pedagógicos debe tener en cuenta que un material que sea adecuado al aprendizaje de la Matemática[140] de los alumnos con necesidades educativas visuales, también lo será, seguramente, para los que no tengan tales necesidades, lo que hace que la investigación y desarrollo de tales materiales sean actividades con un impacto mucho más profundo de los que se destinan, solamente, a una comunidad restringida de alumnos.

[140] Ciertamente que, también ocurre lo mismo, en los otros dominios del saber.

4.5 - COMPETÉNCIAS VERSUS CAPACIDADES

Adoptando JONNAERT[141] empiezo este subcapítulo por evidenciar las nociones de competencia y de capacidad. Así, por competencia, se entiende una estructura cognitiva, más o menos compleja, que moviliza un conjunto de habilidades, conocimientos y capacidades tiendo en vista la resolución, con suceso, de una situación de la vida real. Por su vez, por una capacidad se entiende una estructura cognitiva estabilizada que puede ser utilizada en situaciones muy variadas y que resulta de la articulación de otras estructuras cognitivas más simples denominadas habilidades.

Señalo que en muchas designaciones de competencias surge el término "capacidad", como por ejemplo en la competencia "capacidad para analizar y sintetizar" lo que puede inducir al error de se considerar los conceptos de competencia y capacidad como sinónimos. Que se quede bien claro que la expresión anterior que, incluso, podría, solamente, ser referida por "analizar y sintetizar", debe ser considerada como una simplificación de la expresión "capacidad para analizar y capacidad para sintetizar". Se trata, pues, de una competencia donde se realzan dos capacidades: analizar y sintetizar. En este ejemplo, y en otros semejantes, la utilización del término "capacidad" debe ser entendida, simplemente, como un refuerzo del lenguaje comunicacional.

Las competencias admiten diversas clasificaciones. Así, por ejemplo, cuando dicen respecto a uno contexto profesional se denominan competencias profesionales, sin embargo, se pueden ocurrir en múltiples facetas del cotidiano, tienen la designación de transversales.

Otro modo de clasificarlas es en generales y en específicas. Éstas son apropiadas a personas inseridas en contextos particulares, sin embargo, las otras pueden ser adquiridas por una cualquier persona perteneciente a un grupo más alargado. Así, por ejemplo, las competencias generales de los profesores de una dada área del saber deben ser las mismas que de otro

[141] JONNAERT, Philippe (2012, p. 20).

profesor de otra área del saber, mientras, las competencias específicas son diferentes de un caso para otro.

De seguida se evidencian, en el ámbito de las matemáticas, y tiendo presente la dualidad profesor/alumno, las competencias generales y específicas que a cada uno dicen respecto.

Así, el profesor, y complementando lo que fue referido en el subcapítulo anterior, debe evidenciar las competencias que se evidencian a seguir.

- Capacidad de liderazgo democrático.
- Compromiso ético.
- Aprender a aprender.
- Organizar y planificar.
- Capacidad para analizar y sintetizar.
- Adaptarse a nuevas situaciones.
- Expresarse con claridad de manera oral y escrita.
- Capacidad crítica y autocrítica.
- Capacidad para empatizar.
- Planificación y gestión del tiempo.
- Capacidad para trabajar con autonomía.
- Capacidad para trabajar de forma cooperativa en equipo.
- Capacidad para estimular en los alumnos el trabajo en equipo.
- Generar nuevas ideas.

En el que concierne a las competencias específicas se señalan las que se describen.

- Planificar y desarrollar acciones didácticas en matemáticas
- Saber utilizar diversas estrategias de enseñanza
- Aplicar adecuadamente las nuevas tecnologías a los procesos de enseñanza/aprendizaje.
- Concebir materiales adecuados al aprendizaje, incluyendo juegos y rompecabezas.

- Favorecer el aprendizaje por resolución de problemas en matemática,
- Estimular el aprendizaje, a través de actividades de investigación adecuadas al nivel de conocimientos de los alumnos.
- Evidenciar aplicaciones de los conocimientos enseñados a situaciones de la vida cotidiana.
- Tener sensibilidad para, en las situaciones en que haya alumnos que tengan alguna disfuncionalidad, presentar estrategias y metodologías propias para ellos.

Relativamente a los alumnos las competencias generales a desarrollar se señalan las que se refieren de seguida.

- Compromiso ético.
- Tener predisposición para el aprendizaje.
- Organizar y planificar.
- Adaptarse a nuevas situaciones.
- Expresarse con claridad de manera oral y escrita.
- Capacidad crítica y autocrítica.
- Capacidad para trabajar con autonomía.
- Capacidad para trabajar de forma cooperativa en equipo.
- Utilizar las nuevas tecnologías.

En el que respecta a las competencias mínimas específicas, y tiendo en mente los alumnos de la APEDV, se realzan las que se describen.

- En el ámbito del cálculo aritmético: saber efectuar, sin el auxilio de una máquina, las operaciones aritméticas usuales, sea con números enteros sea con números fraccionarios.
- En el ámbito de la geometría: saber identificar una dirección que hace un determinado ángulo con una dirección considerada como dirección de referencia; identificar figuras planas simples, como triángulos o cuadriláteros, y calcular su perímetro y área; identificar un sólido geométrico y, en el caso de un paralelepípedo recto, calcular sus áreas de la base, laterales y total bien como el volumen.

- En el ámbito de álgebra: resolver ecuaciones del primero y del segundo grados bien como un sistema de dos ecuaciones a dos incógnitas; reconocer que ciertos fenómenos son interpretados por funciones y que, en ese contexto, dada una función calcular la imagen de un cualquier objeto.
- En el ámbito de la estadística: dada una secuencia de valores numéricos, calcular la media, la moda y la mediana; interpretar un diagrama de barras o un diagrama circular.
- Resolver problemas simples utilizando las herramientas matemáticas, atrás, referidas.

Para potenciar las competencias es fundamental desarrollar capacidades. Así, a título de ejemplo, presento cinco situaciones que pueden ocurrir en un acción de formación de matemática en que interviene uno alumno ciego bien como las capacidades que son trabajadas en cada una de esas situaciones.

Situación 1. Calcular, sin utilización de una calculadora hablante, la media, por ejemplo, de 12, 18 y 30. Aquí es trabajada la capacidad del cálculo mental.

Situación 2. Clasificar un triángulo que es representado, por ejemplo, en cartulina. Son trabajadas las capacidades percepción táctil, análisis, sentido figurativo, memoria y comprensión.

Situación 3. Hacerse uno rompecabezas. Las capacidades trabajadas son percepción táctil, análisis, imaginación y síntesis.

Situación 4. Diseñar un ángulo utilizando una placa de corcho, pins y gomillas. Las capacidades en juego son percepción táctil, sentido figurativo y sentido de orientación.

Situación 5. Uno alumno explicar a otro que una tarjeta de crédito es una representación de un rectángulo áureo. Aquí son trabajadas las capacidades percepción táctil, sentido de la proporción, sentido estético y, también, la capacidad del ámbito socio comunicacional.

EL CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

5 - LA ASSOCIACÓN PROMOTORA DEL EMPLEO DE DEFICIENTES VISUALES

La presente investigación, en lo que se refiere a la parte práctica, transcurrió en una institución con un cariz muy particular: la APEDV. Tal como fue referido en el capítulo introductorio, esta entidad fue creada el 24 de Julio de 1980, por iniciativa del Dr. Assis Milton Ovídio Rodrigues, teniendo como gran preocupación la promoción social, cultural y profesional de personas con necesidades visuales especiales.

En lo realativo a la figura del fundador de la APEDV hay a señalar que nació el 27 de Agosto de 1942, en la Ciudad de Pangim, capital de Goa, uno de los territorios integrado en la Antigua India Portuguesa. A partir de los siete años de edad empezó a perder la visión, por sufrir retinosis pigmentaria, habiéndosele agravado de forma irremediable casi 10 años después[142].

Después de la anexión de Goa por la India, en 1961, vino para Portugal, habiendo efectuado su rehabilitación en la Fundación Raquel y Martin Saín. Entretanto, como trabajador estudiante, ha concluyó el curso del liceo y, después, ingresó en la Facultad de Letras de la Universidad Clásica de Lisboa donde frecuentó el curso de Germánicas.

En 1969, ya con familia constituida, interrumpió los estudios universitarios y se trasladó a la ciudad de la Beira, en Mozambique, donde, en ese mismo año, el 22 de Julio, fundó el Instituto Assis Milton, la primera institución creada en las antiguas colonias de Portugal destinada a apoyar a las personas ciegas. Regresó a Portugal en 1976 habiendo concluído, en 1984, la Licenciatura en Lenguas y Literatura Modernas por la, ya referida, Universidad Clásica de Lisboa.

En 2006, el año de su muerte, el LERPARAVER[143], en su honor, creó el primer Concurso Nacional de Textos Inclusivos: Premium Assis Milton.

---
[142] MASCARENHAS, Pedro (2004).
[143] LERPARAVER (2006).

La APEDV, en los primeros tiempos, y durante un período de cuatro años, funcionó en la Charneca do Lumiar, en Lisboa, con la parte administrativa en la residencia del su fundador y la parte laboral en las instalaciones de la Cáritas Portuguesa. Después, en 1984, pasó a disponer de sede propia, en el Bairro de Chelas, en instalaciones cedidas por la Municipalidad de Lisboa, por la cual se paga una renta con valor simbólico.

Figura 5-01.Vista parcial de la sede de la APEDV

La APEDV tiene, actualmente, el estatuto de Institución Particular de Solidaridad Social y, tal como consta en el artículo 2º de sus estatutos, persigue los objetivos siguientes:

- proporcionar adecuada formación de cariz profesional o preprofesional,
- auxiliar en la busqueda y creación de empleo,
- proporcionar apoyo escolar,
- promover su desarrollo intelectual, cultural y deportivo,
- prevenir la ceguera y contribuir, también, para el bienestar general.

La APEDV dispone de un Cuerpo Administrativo, de un Centro de Formación Profesional y de un Centro de Apoyo Ocupacional. Está dirigida por un Director, el Profesor Aquilino Rodríguez, hijo del fundador de la institución, siendo coadyuvado por uno Psicólogo, por una Técnica de Servicio Personal, por una Coordinadora Pedagógica y por una Coordinadora del Centro de Apoyo Ocupacional.

La institución emplea un total de 27 personas, incluyendo los cuadros superiores atrás referidos, así como los funcionarios administrativos, el personal docente y el no docente.

El Centro de Formación Profesional de la APEDV proporciona formación profesional en las áreas de Telefonista/Recepcionistas, Masajistas/Auxiliares de Fisioterapia y de Cestería y Maderas siendo los cursos apoyados con fondos conjuntos de la Unión Europea y del Estado Portugués. Los alumnos reciben una bolsa de formación, subsidio de transporte y, cuando tal se precisa, subsidio de alojamiento.

Los cursos pueden durar un año, caso del Curso en Cestería y Maderas, o dos años, en los casos de los cursos de Telefonista/Recepcionistas y de Masajistas/Auxiliares de Fisioterapia.

En la APEDV el año escolar transcurre de Abril a Marzo, con interrupción en Agosto. En los cursos de telefonista/recepcionista y de masajistas/auxiliares de fisioterapia durante el primer año las actividades lectivas discurren en sala de clases y se distribuyen, en términos medios, por 42 a 44 semanas útiles, en un total de 1450 horas. En el año siguiente, también, en un total de 1450 horas, las actividades lectivas se desarrollan, en régimen de estancia, fuera de la APEDV, con la expectativa de que la pasantia pueda dar lugar a un puesto de trabajo, lo que muchas veces acontece.

Los cursos de Masajistas/Auxiliares de Fisioterapia, además de módulos específicos inherentes a esta actividad (Nociones Básicas de Salud, Psicología de la Salud, Masaje Beard, Electroterapia, Nociones Básicas de Cinesioterapia), incluye, también, módulos de Portugués y de Informática con el objeto de proporcionar a los alumnos competencias para la elaboración de informes a través de la utilización de las nuevas tecnologías de la comunicación e información. A su vez, los cursos de Telefonistas /Recepcionistas contemplan los siguientes módulos: Teoría de la Comunicación, Sociología de las Organizaciones, Higiene y Seguridad en el Trabajo, el Mundo Actual, Inglés, Portugués, Informática y Práctica en la Central Telefónica

Como fue indicado, la APEDV, además del Centro de Formación, dispone, también, de un Centro de Apoyo Ocupacional. En este ámbito la institución tiene un protocolo con el Centro Distrital de la Seguridad Social de Lisboa para 15 alumnos los cuales, además de manifestar ceguera o baja visión, presentan otras limitaciones que pueden ser de orden sensorial, orgánica o mental, lo que se traduce por manifestar una grande incapacidad para poder disfrutar de una adecuada formación profesional. Pero, sobre todo, preténdese que ellos puedan desarrollar su creatividad, tornandose, en cuanto posible, cada vez más activos.

Señálese, sin embargo, que no existen cualesquier exigencias en lo que respecta a la productividad de estos alumnos. Los productos finales de sus actividades pueden ser objetos de comercialización lo que proporciona, naturalmente, un estímulo muy significativo para su valoración personal y, también, para su integración social.

DISEÑO EXPERIMENTAL

6 - METODOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO.

6.1 - INTRODUCCIÓN

En la presente investigación, tal como queda patente en el enunciado del problema que he referido en el capítulo introductorio, pretendí atenerme a las competencias de los formandos de la APEDV que podrían ser potenciadas, en el caso de proporcionarles una enseñanza de la matemática, a través de la utilización de estrategias y metodologías dinamizadoras del aprendizaje.

Con esta Tesis, hecha según una metodología cualitativa en la variante estudio de caso, tal como fue indicado en la sección 1.5.4 y al ser positiva su evaluación, me propuse presentar una propuesta de un programa para una asignatura de matemática destinada a ser integrada en los cursos de la APEDV (masajista/fisioterapeuta y recepcionista/telefonista), pretendiéndose con este programa desarrollar en los alumnos capacidades de los ámbitos lógico-matemático, espacial, corporal-quinestésico y personal, con el fin de proporcionarles la adquisición de habilidades y conocimientos que, de alguna manera, podrán contribuir a su integración en el mercado laboral.

La Dirección de la APEDV fue muy receptiva al proyecto que yo me propuse realizar poniendo para ello, y de una forma muy gentil, a mi disposición la clase de recepcionista/telefonista, compuesta por dos personas ciegas, ambos del género masculino, André[144] y Bento y cuatro personas con baja visión, dos hombres, Camilo y Daniel y dos mujeres, Edite y Francisca.

Oportunamente (mediados de octubre de 2012), me dijeron que los años escolares de la APEDV empiezan en abril y terminan a finales de marzo del año siguiente por lo que, en el momento de la reunión, ya había transcurrido la mitad del año escolar 2012-2013.

---
[144] Nombres fictícios.

El primer contacto con cada uno de los estudiantes se estableció de forma individual, a través de una conversación informal, en la que tuve la oportunidad de explicar el modelo del programa que deseaba trabajar con ellos y cuáles eran los objetivos que me había propuesto alcanzar, procurando coincidir con sus necesidades y expectativas.

Intencionalmente y teniendo en cuenta que la formación transcurriría de manera informal, hice una prueba de diagnóstico, en términos formales, porque no quería que con esta prueba, de alguna manera, podría contribuir a una posible baja de la autoestima de los formandos.

Después de las entrevistas individuales concluí, con respecto a las matemáticas, que el conocimiento de la mayoría de ellos era muy limitado. La mayoría expresó el interés en las áreas sociales, siendo su primer gran deseo obtener un empleo, tan pronto como fuera posible. Sin embargo, eran plenamente conscientes de las grandes dificultades en la realización de este deseo, por un lado, teniendo en cuenta la coyuntura económica difícil que se vive en Portugal, con altos niveles de desempleo y, por otro lado, por sus limitaciones visuales las cuales, téngase en cuenta, ya habían conducido a Camilo, a Daniel y a Francisca a perder sus empleos.

El programa propuesto consta de dos partes, geometría y estadística y tiene por objetivo ser enseñado durante el primer año académico, con una carga horaria de 3 horas por semana, en cada uno de los dos cursos de dos años que la APEDV proporciona: los de recepcionista/telefonista y de masajista/fisioterapeuta.

Como ya se ha mencionado en el capítulo introductorio, por restricciones de tiempo de los alumnos, solamente fue posible impartir el módulo de geometría, durante el período 30 de octubre de 2012 hasta 26 de marzo de 2013, una vez por semana, los martes, y cada sesión por un tiempo de 1h30m, con un total de 30 horas.

Para la enseñanza de las clases, la APEDV me proporcionó una sala pequeña, pero adecuada para el fin perseguido, con una mesa rectangular con capacidad para ocho personas, quedando la distribución, mía y de los estudiantes, tal como la figura siguiente ilustra.

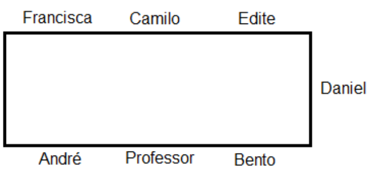


Figura 6.1-01: Disposición de los alumnos y del profesor en la mesa de trabajo.

Señalo, también, que durante el curso he enviado a los alumnos, vía correo electrónico, pequeños textos de apoyo, de modo a que tuvieran acceso a elementos que fueron proporcionados en las aulas. Atendiendo a que, a partir de documentos escritos a través de editores de textos usuales[145], el lector de pantalla JAWS, utilizado por los dos alumnos ciegos, al "leer" una expresión en que interviene un radical como, por ejemplo, $\sqrt{48}$, no interpreta el símbolo de raíz cuadrada, refiriéndose solamente al radicando 48, entonces, en lugar del símbolo de raíz cuadrada, generalmente utilizado, he adoptado la expresión **RaizQuadrada** (que en esta Tesis he traducido por **RaízCuadrada**) para facilitar, así, y en lo posible, la lectura sonora de los textos de apoyo. Por motivos semejantes, en vez de, por ejemplo, 5^2 que el JAWS "lee" como *cinco dos*, he utilizado **Quadrado** (h), aquí traducido por **Cuadrado** (h) y, en vez de ≈ (aproximadamente igual), que el JAWS "lee" como *tilde*, utilicé ±= que el JAWS "lee"[146] como *más menos igual*.[147]

En este capítulo, y en lo que respecta a situaciones ocurridas en la clase, uso expresiones como las que atrás fueron expuestas, para enfatizar que tuve necesidad de utilizarlas en los textos de apoyo que envié a los dos alumnos ciegos, aunque, en la sala de clase, los alumnos de baja visión[148]y yo utilizásemos la simbología matemática usual, mientras los alumnos ciegos, a

[145] Ver sección 3.3.1, relativa al editor matemático LAMBDA.
[146] A lo largo de la Tesis serón referidas otras situaciones.
[147] Ver sección *3.3.1 – Editor Matemático LAMBDA*.
[148] Francisca con alguna lentitud debido al cansancio visual que iba manifestando por el hecho de utilizar constantemente una lupa para visualizar lo que iba escribiendo.

través de las máquinas Perkins, escribían de acuerdo con la simbología braille para la matemática[149].

En el subcapítulo siguiente describiré los contenidos impartidos, los materiales utilizados, así como los instrumentos de evaluación y, en este último ámbito, se presta atención a las secciones: *6.2.10 – Momentos de evaluación y 6.2.12 – Trabajo Práctico.*

[149] A veces con pequeños errores por reducida práctica del braille.

6.2 - EL MÓDULO DE GEOMETRÍA

6.2.1 - La primera clase

En la primera sesión de trabajo, para crear un clima de empatía entre el profesor y los estudiantes, se presentaron objetos de uso diario para que los discentes los manipulasen y pudiesen reconocer en ellos las figuras geométricas que forman parte de la vida cotidiana. En la lista de objetos contábamos con seis dados, seis cajas de fósforos, seis tarjetas de cajero automático, seis anillos, seis CDs insertados en sus portadas, seis monedas, seis vasos de plástico, dos escuadras geométricos y un balón de fútbol.

Figura 6.2.1-01. Material utilizado en la primera clase

A cada uno de los participantes entregué un dado y pregunté qué formas geométricas presentaban las respectivas caras. *¿Son cuadrados? ¿Son rectángulos*? Todos respondieron que eran cuadrados. *¿Y en cuanto al dado, es un cubo? ¿Es una esfera?* cuestioné. André y Daniel, respondieron con prontitud que era un cubo, los otros manifestaron después su acuerdo. Les mencioné que un cubo es sólido geométrico constituido por seis caras, que todas ellas presentan la forma de cuadrados.

A continuación, distribuí a cada uno de ellos una caja de fósforos y pregunté qué formas geométricas presentan sus respectivas caras. Todos respondieron que eran rectángulos. *¿Y en cuanto a la caja de cerillas, es también un cubo?* Pregunté. André refirió que no era un cubo porque las caras no eran cuadradas. Daniel, en primer lugar y los otros, luego, manifestaron su acuerdo.

¿Y qué designación tiene el sólido geométrico que presenta la caja de fósforos? Pregunté de nuevo. Nadie sabía cómo responder. Entonces, señalé que se trataba de un paralelepípedo (rectangular) que se caracteriza por ser un sólido geométrico constituido por seis caras con forma de rectángulos.

Después entregué, también, a cada uno de ellos, una tarjeta de cajero automático y pregunté cuál era la forma geométrica que presentaba. Todos ellos, con naturalidad, ratificaron ser un rectángulo.

Llamé, entonces, su atención sobre las tarjetas de crédito o débito, así como el carnet de identidad y la licencia de conducción, eran concebidos para ser manipulados de forma cómoda. Para este propósito la longitud y la anchura están en una relación de tal manera que al dividir la longitud de la tarjeta por su anchura se obtiene un número llamado **número aúreo**[150], cuyo valor aproximado, con un decimal, es 1,6.

¡Se quedaron perplejos!

Sugerí, entonces, que colocasen dos tarjetas de débito, orientadas perpendicularmente una en relación a la otra y de tal manera que dos de los lados de una de ellas coincidiesen con dos de los lados de la otra, como se muestra en la figura siguiente. Después, destaqué que la zona de contacto entre las dos tarjetas representaba un cuadrado y que la parte de cada tarjeta fuera de la zona de contacto, representaba un rectángulo con las dimensiones proporcionales a las dimensiones de cada una de las tarjetas. Resalté, entonces, que el rectángulo aúreo representado por cada una de las tarjetas estaba descompuesto en un cuadrado y en otro rectángulo que eran, también, un rectángulo aúreo.

---

150 $\Phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$

Figura 6.2.1-02. Las tarjetas de débito/crédito son representaciones de rectángulos aúreo.

Es siempre útil al profesor, al referirse a un rectángulo aúreo, tener presente cómo puede formarse. Por tanto, de un cuadrado cuyo lado podemos considerar como unidad de longitud, se considera el punto medio de uno de sus lados. Con este fin, considérese el cuadrado [ABCD] representado en la figura siguiente y el punto medio M del lado [BC].

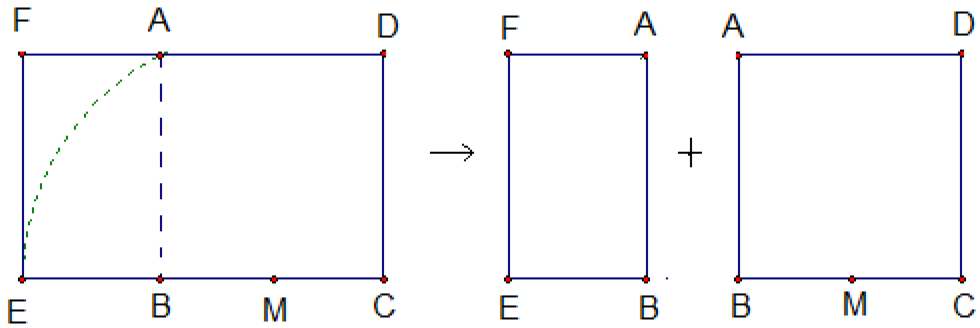


Figura 6.2.1-03. Un rectángulo aúreo se caracteriza por poder ser descompuesto en un cuadrado y en otro rectángulo con dimensiones proporcionales a las del rectángulo inicial.

Después, con centro en M, se dibuja un arco de circunferencia, desde el punto A hasta su intersección con la prolongación del lado [BC], siendo este punto el punto E. El rectángulo que [EC] y [CD] representan, respectivamente, la longitud y la anchura, es un rectángulo aúreo.

Falta analizar si el rectángulo [FEBA] es también un rectángulo aúreo. Para ello, se averigua si sus dimensiones son proporcionales a las del rectángulo [FECD].

Luego como longitud [BC] = 1 se tiene longitud [MB] = 1/2 y, en consecuencia, longitud [MA] = longitud [ME] =$\frac{\sqrt{5}}{2}$ dónde longitud [EC] = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De aquí resulta que la relación entre la longitud y la anchura del rectángulo [FECD] es
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: 1 = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A su vez, para el rectángulo [FEBA] se tiene longitud [FE] = 1 y longitud [EB] =$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dónde la relación entre la longitud y la anchura es 1: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Luego el rectángulo en cuestión es, también, un rectángulo aúreo.

Volviendo al diálogo con los estudiantes indico que les hice notar, también, que los arquitectos y los escultores griegos, en la Antigüedad Clásica, para hacer sus obras – los monumentos y las esculturas, respectivamente - más estéticas utilizaran en ciertos elementos dimensiones donde interviene el número aúreo. Tal es el caso, por ejemplo, del Partenón en Atenas, en Grecia, cuya fachada principal constituye una representación de un rectángulo aúreo, dispuesto en posición horizontal.

Hice notar, también por ejemplo, que en la actualidad puede hacerse referencia a la fachada de la sede de las Naciones Unidas en Nueva York, que representa un rectángulo aúreo, pero, dispuesto en posición vertical.

Aun así, por curiosidad, referí que en la naturaleza el número aúreo se manifiesta en muchas situaciones. Como ejemplo, destaqué que el ombligo de una persona divide la altura en dos partes desiguales, de tal manera que la relación entre la parte más grande (la distancia desde el ombligo hasta las plantas de los pies) y la parte más pequeña (la distancia del ombligo a la parte superior de la cabeza) es un valor que, en términos de promedio, es el número aúreo

Entregué luego, a cada uno de ellos, un anillo. Les pregunté de qué forma geométrica se trataba. *Es un anillo*, dijo Francisca. *Sí, pero cuál es la forma geométrica de que se trata ¿es un círculo? ¿Es una circunferencia*? Como vacilaban, expliqué en ese momento, que la circunferencia es una línea plana cerrada cuyos puntos son equidistantes de un punto común llamado centro, y que el círculo es la región delimitada por una circunferencia, es decir, el círculo es la región del plano que contiene una circunferencia en su interior. Entonces André dijo que se trataba de una circunferencia, siendo corroborado por todos.

A cada uno de ellos entregué, en seguida, un CD insertado en su cubierta y pregunté *¿cuál es la forma geométrica que tiene la cubierta del CD*? Camilo y Edite indicaron tratarse de un rectángulo, pero André y Bento, curiosamente los dos estudiantes ciegos, y, también, Daniel, dijeron ser un cuadrado. Sugerí examinar concretamente cuál era la relación entre los lados. Todos acordaron entonces que se trataba de un cuadrado.

En cuanto al CD, propiamente dicho, Edite dijo ser una "cosa redonda", André y Daniel indicaron que era un círculo, Francisca dijo ser una circunferencia, los otros vacilaron entre el círculo y la circunferencia. Habiendo aclarado, de nuevo, la diferencia entre la circunferencia y círculo, todos terminaron aceptando que el CD tiene la forma de un círculo.

Entregué, en seguida, una moneda a cada uno de los alumnos y cuestioné por la forma geométrica de cada una de sus caras. Todos acordaron que se trataba de un círculo.

También, para un mejor esclarecimiento, entregué a cada alumno un vaso de plástico y solicité que examinasen las formas geométricas inherentes a la boca y al fondo. Camilo dijo inmediatamente que se trataba de dos círculos. Daniel señala que ... *el fondo del vaso es un círculo, pero la boca no*... Pregunté, entonces, *¿cuál es la diferencia?* Bento respondió, en forma chistosa, *por la boca puede ponerse agua en el vaso, pero por el fondo no*... Insistí en mi pregunta y André respondió... *el fondo es un círculo y la boca es una circunferencia*... Todos acabaron por estar de acuerdo.

Después, he solicitado que analizasen las dos escuadras geométricos que he colocado sobre la mesa de trabajo y les he preguntado por la forma geométrica que estos objetos presentaban. En seguida André dijo tratarse de triángulos y sus compañeros estuvieron de acuerdo.

Finalmente, me restaba el balón del fútbol. He preguntado si la forma geométrica que presentaba se parecía a un cubo o una esfera. Algunos respondieron con prontitud, que se trataba de una esfera. Pedí, entonces, que cada uno examinase cuidadosamente el revestimiento del balón y pregunté, luego, a Francisca, si los componentes que constituyen el revestimiento del mismo eran todos iguales. Me dijo que no. Pregunté por cuántos tipos diferentes de componentes se podían observar. Adelantándose el Bento dijo... *hay algunas piezas con 5 lados y otras con 6...* Pregunté si todos estaban de acuerdo. André y Daniel concordaran y los otros, después, acabaron también por ratificar lo mismo.

Pregunté: ¿*cómo se llaman las figuras planas con 5 lados*?

Como nadie respondía, expliqué que eran pentágonos. Y, pregunté, nuevamente, *¿cómo se llaman las figuras planas con 6 caras?* Solo André respondió: *hexágono*.

Solicité, después, que cada uno contase el número de pentágonos y el número de hexágonos que forman el revestimiento del balón. Tras un breve debate se concluyó que el recubrimiento del balón que había presentado tenía 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Después de la presentación de los objetos, que anteriormente referí, hice notar que la rama de la Matemáticas con que trabajábamos era la Geometría y en este contexto les pedía que anotasen la siguiente definición.

> *Geometría es la ciencia, o la rama de la Matemática, que estudia las figuras desde el punto de vista de la forma, de la extensión y de sus posiciones relativas.*

Resaltando, enseguida, que el término "geometría" deriva del griego clásico y resulta de la concatenación de "geo", significando "tierra" y "metría", refiriéndose a "medida".

Porque es muy estimulante para los procesos de enseñanza/aprendizaje, hacer, siempre que sea posible, referencias a aspectos históricos relacionados con los temas en estudio, indicando que:

> *La **Geometría**, como un conjunto de conocimientos prácticos relativos a longitudes, áreas y volúmenes, surgió independientemente en muchas civilizaciones de la Antigüedad Clásica, con importancia especial en Egipto y después en Grecia.*

Pretendí, también, llamar la atención de que, a veces, se den varias definiciones de la misma realidad. Y, para el caso de la Geometría, sería muy interesante conocer la definición proporcionada por el matemático alemán Hans FREUDENTHAL[151]:

> "…*GEOMETRÍA es entender el espacio en que el niño vive, respira y se mueve. El espacio en que el niño debe de aprender a aprender, a conocer, explorar y conquistar, para vivir, respirar y moverse mejor*".

Para la clase llevé conmigo, también, una placa de corcho, alfileres (para mapas) y gomillas. Solicitando a los alumnos que pinchasen alfileres en la placa e hiciesen interconexiones con gomillas para construir figuras geométricas y se cuestionasen mutuamente lo relativo a las figuras que estaban construyendo.

Y, así, terminó la primera lección.

[151] VELOSO, Eduardo (1998, p.15).

6.2.2 - Los puntos y las rectas

Hice notar a los alumnos que en Geometría se consideran tres tipos de entidades fundamentales: **puntos, rectas** y **planos**. Los puntos son los elementos de la **geometría lineal**; las rectas son los elementos de **geometría plana** y los planos son los elementos de la **geometría espacial**.

Para hacer referencia de que los puntos, así como las rectas y los planos, son construcciones del pensamiento humano, y son por tanto entidades abstractas, decidí referirme, inicialmente, al caso de los números. A tal efecto entregué, a cada uno, una hoja indicándoles que el número 1 estaba escrito varias veces (por supuesto a Benito y André entregué hojas con el número escrito en braille y en relieve) y les pregunté, cuántos números 1 ellos reconocían. Todos se pusieron a contar el número de veces que el número 1 estaba escrito en la hoja y respondieron: *¡cuatro!*

Les invité, a continuación, a contar conmigo hasta 10, los números naturales: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10*. Y luego, les pregunté: *¿cuántas veces han dicho el número 1?* Algunos han vacilado, pero André ha dicho*: ¡una vez!* Manifesté mi acuerdo e hice notar:

> "*sólo hay un único número 1. Lo que está escrito en cada una de vuestras hojas son 4 representaciones del número 1. El número 1 es un ente abstracto. Sus representaciones son, pues, entidades concretas. Lo que nosotros hacemos, usualmente, en la vida corriente, es hacer representaciones de los números."*

Indiqué, a continuación, que los puntos, las rectas y los planos, también son construcciones del pensamiento humano, por eso son entidades abstractas y, tal como los números, admiten representaciones.

Señalé, también, que en términos abstractos los puntos no tienen dimensión, es decir, no tienen forma y no tienen extensión. Tienen, en todo caso, posición o situación, y para sus representaciones, se puede utilizar, en términos gráficos, una pequeña cruz (x), un pequeño trazo sobre una línea o un pequeño círculo. En esa ocasión entregué a cada alumno una hoja que contenía una figura idéntica a la figura siguiente y, por supuesto, para los dos alumnos ciegos tal figura fue evidenciada en relieve en una hoja de papel cebolla con las letras en braille.

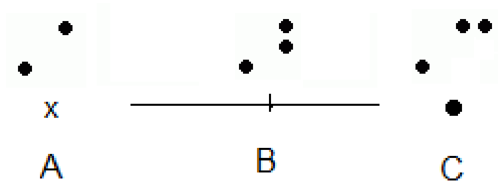


Figura 6.2.2-01: Representaciones gráficas de un punto A, a través de una pequeña cruz (x); de un punto B, por un trazo, y de un punto C por un pequeño círculo.

Explicité, también que un punto puede ser representado, por ejemplo, por un alfiler en una placa de corcho o por un nodo en una cuerda estirada y, en esa ocasión, he presentado ejemplos con situaciones concretas.

Continué explicando, después, que los puntos, en términos generales, se denominan por letras latinas mayúsculas (A, B, C,..., Z), eventualmente indexadas con un subíndice (A_1, A_2 , A_3 ,..., P_1, P2, P_3,...).

Evidencié que en términos formales las rectas son elementos geométricos con una sola dimensión. Del mismo modo que los puntos, las rectas son, también, construcciones del pensamiento humano.

Una manera de representar una línea recta es generalmente a través de un trazo dibujado con o sin la ayuda de una regla, en papel o en el cuadro de la sala de clase. Para los estudiantes con necesidades educativas visuales, y también para sus compañeros de grupo, una línea recta puede ser representada, por ejemplo, por un hilo estirado, o por un trazo rectilíneo en relieve sobre una hoja de papel adaptada para este efecto. En las cercanías de la representación se pone una letra minúscula para designar la línea recta. En este contexto, en general, se utilizan letras latinas minúsculas (a, b, c,..., r, s,... z), eventualmente indexadas por un subíndice (a_1, a_2, $a_{3,\ ...,}$ r_1, r_2, $r_{3,}$ …).

Reálcese, sin embargo, que en el sistema Braille la codificación de una recta se realiza anteponiendo la letra que representa la recta por la señal compuesta (5, 25, 2), indicativo de doble flecha.

A los alumnos se les ha hecho notar que en Geometría (y en otras ramas de la Matemática) es muy habitual que sean formuladas algunas proposiciones relativas a sus elementos fundamentales (puntos, rectas y planos) que, por su evidencia, es decir, sin que haya necesidad de demostración, se consideran verdaderas, dándoselas la denominación de **axiomas**. Y como primera afirmación he destacado el siguiente:

AXIOMA 1: una recta no tiene puntos extremos, es decir, no tiene principio ni fin.

A propósito de este axioma, les pregunté: *¿están de acuerdo?* Todos respondieron afirmativamente.

Después presenté un segundo axioma:

AXIOMA 2: Dos puntos distintos determinan una y solamente una recta.

También, en este ámbito, les pregunté si estaban o no de acuerdo. Todos respondieron afirmativamente. A continuación les he puesto la siguiente cuestión*: ¿dos rectas diferentes pueden tener dos puntos en común?* Como nadie contestaba, he preguntado: *¿dos rectas distintas cuántos puntos, como máximo, pueden tener en común?* André dijo pronto, *¡uno!* Todos acabaron por estar de acuerdo. Y, he continuado, *¿si dos rectas diferentes pueden tener, como máximo, sólo un punto en común, entonces será posible que dos rectas diferentes tengan dos puntos en común? ¡Piensen bien!* André y Daniel respondieran que no, y los restantes han manifestado, también, su acuerdo.

Luego expresé que:

- cualquier punto de una recta la divide en dos partes, una en un determinado sentido y la otra en el sentido opuesto;

- a cada una de estas partes de recta se denomina semirrecta;
- al punto se denomina el origen de cada una de las dos semirrectas.

Con esta ocasión entregué a cada alumno una hoja con un dibujo donde se muestra una recta r, un punto O, que va a ser el origen de dos semirrectas, una de las cuales contiene un punto A (situado a la izquierda de O) y la otra contiene un punto B (situado a la derecha de O).

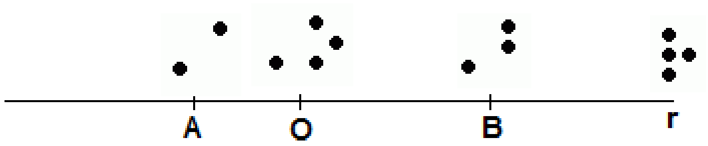


Figura 6.2.2-02: Recta r con tres puntos A, O y B.

Hice notar a los alumnos que es muy usual representar una semirrecta, con origen en O que contiene el punto A, por **$\dot{\text{O}}$A** (una O con un punto por encima, seguida por la letra A). Sin embargo, como el lector de pantalla JAWS, que es utilizado por los alumnos de la APEDV, no contempla la lectura de una O con un punto en la parte superior, he decidido retirar el punto que está encima de la primera letra. Nótese que en los textos en braille este problema no se plantea una vez que la codificación de una semirrecta se hace anteponiéndose a la designación de las letras "O" y "A", la señal compuesta (25, 2) que, así mismo, es la codificación de una "flecha"

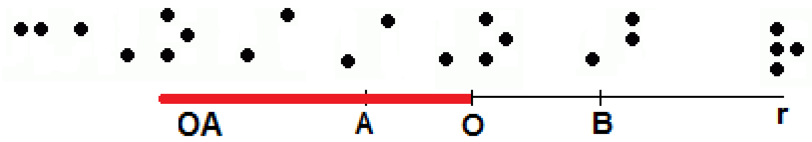


Figura 6.2.2-03. Semirrecta de origen en O y pasando por el punto A.

Naturalmente que la designación OB, referida en la figura, se relaciona con la semirrecta con origen en O y con el punto B

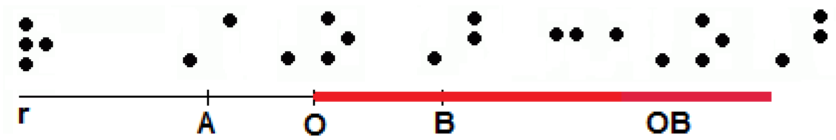


Figura 6.2.2-04: Semirrecta de origen en O y pasando por el punto B.

Si en la representación anterior sí se cambia el orden de las letras entonces la designación BO re refiere a la semirrecta con origen en B y que contiene el punto O.

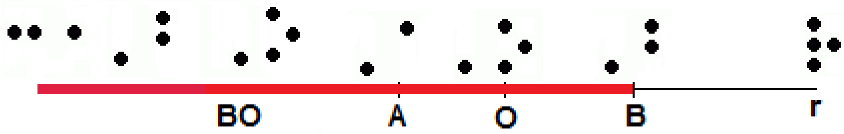


Figura 6.2.2-05: Semirrecta de origen en B y pasando por el punto O.

Presenté, luego, la noción de segmento de recta como la porción de recta que está comprendida entre dos de sus puntos los cuales, señalé, son denominados extremos del segmento de recta. Indiqué, también, que la designación de un segmento de recta se hace poniendo, entre paréntesis rectos, las letras relativas a sus extremos y que, en el sistema Braille, su codificación se hace anteponiendo a la codificación de las letras relativas a sus extremos la señal compuesta (4, 14).

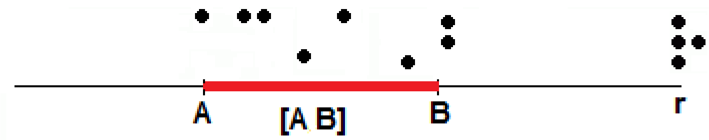


Figura 6.2.2-06: Segmento de recta de extremos A y B.

Tuve la oportunidad de advertir que en la representación de un segmento de recta es indiferente el orden en que se ponen los extremos. Por lo tanto, [AB] y [BA] se refieren al mismo segmento de recta.

6.2.3 - Los planos

Recordé a los alumnos que, hasta ahora, había sido considerado el punto como elemento geométrico sin dimensiones y la recta como elemento geométrico con una dimensión. Realcé, por tanto, la existencia de un tercer tipo de elemento geométrico fundamental, el plano, que tiene dos dimensiones y evidencié que, tal como los puntos y las rectas, también los planos son entidades abstractas y que una forma de representarlos podría ser, por ejemplo, a través de la tapa de una mesa, de una hoja, preferiblemente colocada sobre una superficie lisa, por el suelo o por una pared de la sala de clase, por una placa de corcho, por una hoja o cartulina e, incluso, utilizando la palma de la mano. He referido, también, que es usual designar los planos por letras griegas, como por ejemplo, **α** (alfa), **β** (beta), **γ** (gamma), **δ** (delta), **π** (pi), **ρ** (rho) y σ (sigma), eventualmente indexadas por un índice natural ($\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \pi_1, \pi_2, \pi_3} \ldots$).

De los seis estudiantes que han integrado las actividades de formación contempladas en la presente tesis, sólo los dos estudiantes ciegos, André y Bento, tienen muy buenos conocimientos del sistema Braille. Pero, curiosamente, ambos no sabían cómo en este sistema se codifican las letras griegas. Les he explicado, entonces, que en el sistema Braille se obtiene la representación de las letras griegas minúsculas a partir de la codificación de las letras minúsculas latinas anteponiendo el símbolo compuesto (456 4). Indicando que, por ejemplo, a las letras griegas "α" (alfa), "β" (beta) "γ" (gama), "δ" (delta), "π" (pi), "ρ" (rho) y "σ" (sigma), ampliamente utilizadas en diversos campos de las matemáticas, corresponden, respectivamente, las letras latinas "a", "b", "c", "d", "p", "r" y "s", y que la codificación de la letra "α" es (456 4 1), la letra "β" es (456 4 12) y, así, sucesivamente.

Señalé, además, que en el sistema Braille, la codificación, de las letras griegas mayúsculas se obtienen a partir de la codificación de las letras minúsculas, sustituyendo el símbolo compuesto (456 4) por el símbolo (456 45).

En la siguiente tabla, que tuve la oportunidad de proporcionarles, se describe la codificación en sistema Braille, de las letras griegas, sean minúsculas o sean las mayúsculas.

ALFABETO GRIEGO				
Letras	**Minúsculas**		**Mayúsculas**	
	Braille	**Símbolo corriente**	**Braille**	**Símbolo corriente**
Alfa	(456 4 1)	Α	(456 45 1)	Α
Beta	(456 4 12)	Β	(456 45 12)	Β
Gamma	(456 4 1245)	Γ	(456 45 1245)	Γ
Delta	(456 4 145)	Δ	(456 45 145)	Δ
Épsilon	(456 4 15)	Ε	(456 45 15)	Ε
Zeta	(456 4 1356)	Ζ	(456 45 1356)	Ζ
Eta	(456 4 156)	Η	(456 45 156)	Η
Teta	(456 4 1456)	Θ	(456 45 1456)	Θ
Iota	(456 4 24)	Ι	(456 45 24)	Ι
Kappa	(456 4 13)	Κ	(456 45 13)	Κ
Lambda	(456 4 123)	Λ	(456 45 123)	Λ
Mu	(456 4 134)	Μ	(456 45 134)	Μ
Nu	(456 4 1345)	Ν	(456 45 1345)	Ν
Xi	(456 4 1346)	Ξ	(456 45 1346)	Ξ
Omicron	(456 4 135)	Ο	(456 45 135)	Ο
Pi	(456 4 1234)	Π	(456 45 1234)	Π
Ró	(456 4 1235)	Ρ	(456 45 1235)	Ρ
Sigma	(456 4 234)	Σ	(456 4 234)	Σ
Tau	(456 4 2345)	Τ	(456 45 2345)	Τ
Úpsilon	(456 4 136)	Υ	(456 45 136)	Υ
Fi	(456 4 124)	Φ	(456 45 124)	Φ
Chi	(456 4 12346)	Χ	(456 45 12346)	Χ
Psi	(456 4 13456)	Ψ	(456 45 13456)	Ψ
Omega	(456 4 2456)	Ω	(456 45 2456)	Ω

En lo que respecta a los planos, como sucedió con las rectas, indiqué algunos axiomas, siendo el primero de ellos el que sigue:

AXIOMA 3: una recta y un punto que no le pertenezca definen uno y un solo plano.

Les pedí a todos que reflexionaran sobre este axioma y, en este ámbito, teniendo en cuenta que dos puntos distintos definen una recta, todos concluyeron que tres puntos no colíneales, es decir, que no pertenecen a la misma línea recta, definan uno y un solo plano. Como una aplicación práctica de esta situación mencioné el trípode, tres pies o anclas, que sirve como instrumento de apoyo, como por ejemplo, a cámaras fotográficas o equipamientos utilizados para la medición de los ángulos en el ámbito de estudios topográficos, los teodolitos. Los tres puntos de contacto de los pies del trípode con el suelo, independientemente de la irregularidad del terreno, al definir un plano, aseguran estabilidad al equipamiento colocado en el trípode.

Propuse, luego, la siguiente cuestión: *¿dos planos distintos pueden tener tres puntos no colíneales en común?* André, después de reflexionar un poco, dijo: *esto es muy similar a la pregunta sobre si dos rectas diferentes podrían tener dos puntos en común*. *¿Muy bien, André y entonces*? Repliqué yo. *Así,…, dos planos diferentes no tienen tres puntos no colíneales en común*, concluyó él.

Y si los tres puntos son colíneales, ¿ya pueden pertenecer a dos planos distintos? insistí yo. *¡Ah! ahí ya pueden*, contestó André.

Presenté, entonces, otro axioma:

AXIOMA 4: Si dos puntos de una recta están en un mismo plano entonces la recta también está contenida en el plano.

Tal como en los anteriores axiomas, les invité a reflexionar sobre este axioma y señalé que éste asegura que **el plano es una entidad sin límite cualquiera que sea la dirección definida por dos puntos diferentes entre sí mismos**.

Los dos puntos que he mencionado, definen una recta la cual, según este último axioma, está completamente contenida en el plano y, como la recta no tiene ningún principio y ningún fin (axioma 2) el plano tampoco lo tiene, según esta dirección definida por los dos puntos. Cómo los puntos pueden ser elegidos libremente, por tanto el plano no tiene límites sea cual sea la dirección que se considere.

Siguiendo la reflexión anterior mencioné otra proposición que, por su evidencia, también, sería considerada como verdadera.

AXIOMA 5: Dos rectas distintas pertenecientes al mismo plano, o son paralelas (no se encuentran), o son concurrentes (tienen un punto en común).

Usando pajitas[152] tuve la oportunidad de referirles que dos rectas tienen la designación de rectas coplanarias cuando están contenidas en el mismo plano y no coplanarias, o alabeadas, cuando no pertenecen a un mismo plano. Resalté, también, que dos rectas concurrentes se dicen perpendiculares cuando definen entre si ángulos rectos.[153]

Señalé, también, en qué consiste la proyección ortogonal de un punto en una recta. Les he explicado que, como se muestra en la figura siguiente, y que los estudiantes tuvieron la oportunidad de verificar, para determinar la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r, se considera una recta s perpendicular a r y tal que s pasa por P. De la intersección de las dos rectas resulta un punto Q que es la proyección ortogonal deseada.

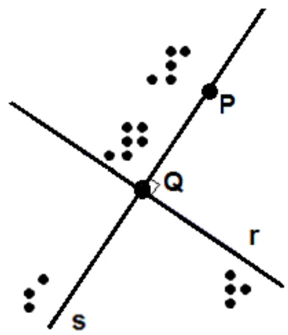


Figura 6.2.3-01: El punto Q es la proyección del punto P sobre la recta r.

[152] utilizadas para beber líquidos colocados en recipientes.
[153] la noción de ángulo es presentada en la próxima sección.

Con la utilización de una placa de corcho, alfileres y gomillas y la cubierta de un CD, fueran efectuados varios ejercicios en que se determinaba la proyección de un punto sobre una recta. En este sentido cabe señalar la secuencia constituida por las cuatro figuras siguientes.

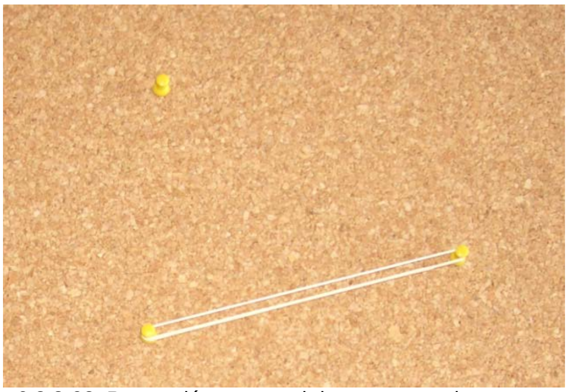


Figura 6.2.3-02. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta (1).

En esta figura se muestra una recta representada por una gomilla uniendo dos alfileres (cada uno representa un punto) y un tercer punto no perteneciendo a la recta, representado por otro alfiler.

Figura 6.2.3-03: Proyección ortogonal de un punto sobre una recta (2).

Una cubierta de un CD es utilizada para desempeñar las funciones de una escuadra.

Figura 6.2.3-04: Proyección ortogonal de un punto sobre una recta (3).

Un cuarto alfiler es colocado sobre la gomilla, de tal modo que él represente la proyección ortogonal pretendida.

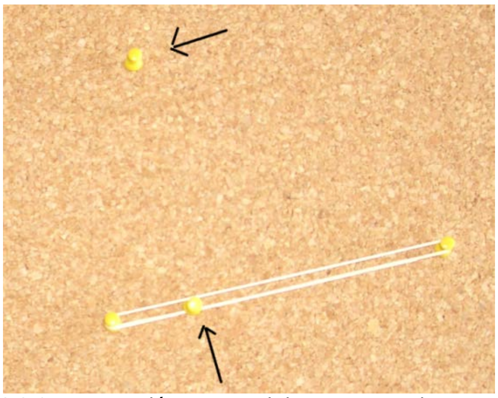


Figura 6.2.3-05: Proyección ortogonal de un punto sobre una recta (4).

Esta cuarta y última figura, ya sin la cubierta del CD, ilustra la representación de una recta, la representación de un punto que no pertenece a la recta y, de otro punto perteneciente a la recta, que es la proyección ortogonal que se pretendía determinar.

También tuve la oportunidad de mostrar que, en el caso de pertenecer el punto a la recta, coincide con su proyección ortogonal sobre la recta.

Para la determinación de la proyección ortogonal de un punto P en un plano π[154] les indiqué que el procedimiento era similar al anterior. Con este fin, he señalado, que se debe considerar una recta t que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π. La intersección de la recta t con el plano π define un punto Q que es la proyección ortogonal deseada.

En las clases impartidas en la APEDV el estudio de la posición relativa de dos planos se hizo, sobretodo, a través de una placa de corcho, de una hoja de cartulina o de la tapa de la mesa de trabajo y, también, a través de la conjugación de las posiciones de las palmas de las manos y, en el estudio de la posición relativa de una recta con un plano, se utilizó, para representar una

[154] En cuando al estudio de la circunferéncia versus círculo, referido en sección 6.2.9, me di cuenta que el lector de pantalla JAWS interpreta el símbolo π como p. A partir de esa ocasión alerté los alumnos que en las clases y en los textos de apoyo la constante π sería designada, tal como se lee o sea por PI.

recta, una pajita, un lápiz o el dedo indicador de una das manos. En las tres figuras siguientes se muestran las representaciones de

- dos rectas alabeadas, a través de la utilización de dos pajitas, en la primera;

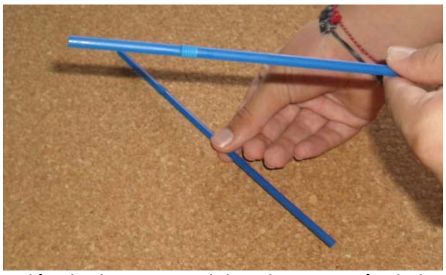


Figura 6.2.3-06: Representación de dos rectas alabeadas, a través de la utilización de dos pajitas.

- una recta perpendicular a un plano, a través de utilización de una pajita y de una placa de corcho, en la segunda;

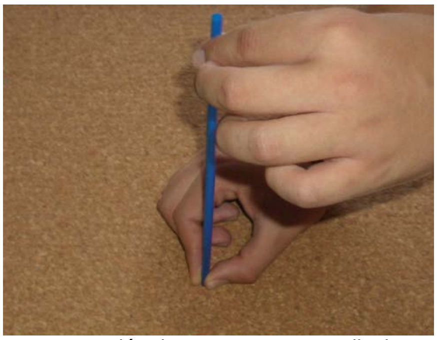


Figura 6.2.3-07: Representación de una recta perpendicular a un plano, a través de la utilización de una pajita y de una placa de corcho.

- dos planos concurrentes, a través de la utilización de una hoja de cartulina y de una placa de corcho, en la tercera.

Figura 6.2.3-08: epresentación de dos planos concurrentes a través de la utilización de una hoja de cartulina y una placa de corcho.

Los alumnos tuvieron la oportunidad de constatar que cuando dos planos no paralelos se intersectan los puntos comunes están alineados unos con los otros constituyendo una recta. Por este hecho les presenté la proposición siguiente, como axioma:

AXIOMA 6: Si dos planos distintos se encuentran entonces su intersección es una recta.

6.2.4 - Los ángulos

Empecé el proceso de enseñanza/aprendizaje de este tema exponiendo la noción de ángulo. Para ello recabé de los alumnos que pensasen en dos semirrectas con el mismo origen, y con pajitas representando tales semirrectas pedí que, sobre la mesa de trabajo colocasen dos pajitas de tal modo que la extremidad de una de ellas coincidiese con la extremidad de la otra, tal como se muestra en la figura siguiente. Referí, entonces, que ellos, en estas condiciones, estaban en presencia de una nueva entidad geométrica denominada ángulo, la cual consiste, esencialmente, en dos semirrectas con el mismo origen, teniendo las semirrectas la designación de **lados del ángulo** y el origen común la denominación de **vértice**.

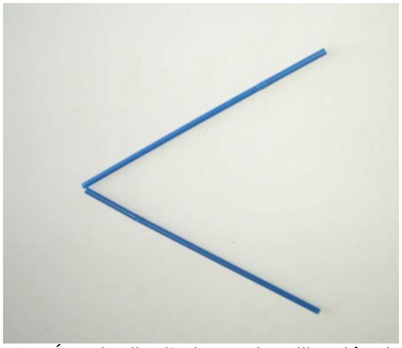


Figura 6.2.4-01: Ángulo diseñado con la utilización de dos pajitas

También, en este contexto, he tenido la oportunidad de resaltar diversas situaciones con el uso de, por ejemplo:

- una placa de corcho, alfileres y gomillas,

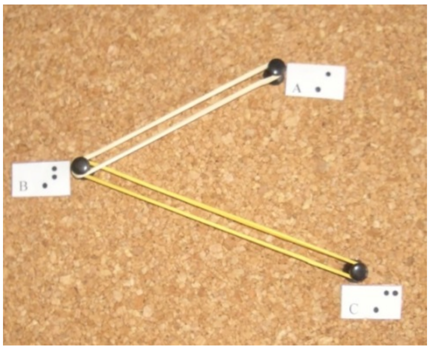


Figura 6.2.4-02: Ángulo diseñado con la utilización de una placa de corcho, alfileres y gomillas.

- un multiplano rectangular, alfileres y gomillas,

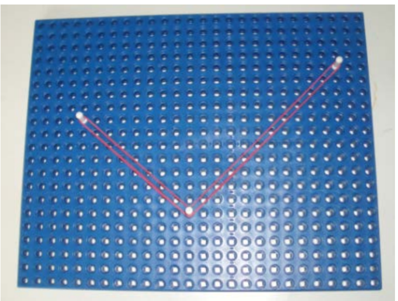


Figura 6.2.4-03: Ángulo diseñado con la utilización del multiplano rectangular, alfileres y gomillas.

- un multiplano circular, alfileres y gomillas,

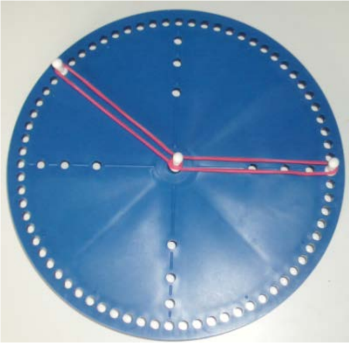


Figura 6.2.4-04: Ángulo diseñado con la utilización del multiplano circular, alfileres y gomillas.

- dos lápices apoyados en la mesa de trabajo en los cuales las puntas se tocan,

Figura 6.2.4-05: Ángulo diseñado con la utilización de dos lápices cuyas puntas se tocan.

- dos dedos adyacentes de una mano,

Figura 6.2.4-06: Ángulo definido por dos dedos contiguos.

- dibujo en papel cebolla,

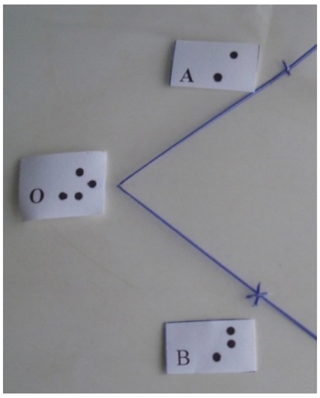


Figura 6.2.4-07: Ángulo diseñado en papel-cebolla.

- las agujas de un reloj didáctico.

Figura 6.2.4-08. Ángulo definido por las agujas de un reloj didáctico.

Con el objetivo de, posteriormente, definir polígonos convexos y no convexos, señalé que dos semirrectas, con el mismo origen, designadas, por ejemplo, OA y OB, dividen el plano en dos regiones. Destaqué, también, que si los puntos A, O y B no son colineales, es decir, las dos semirrectas no están contenidas en la misma recta, entonces una de las regiones es **convexa** o **saliente.**

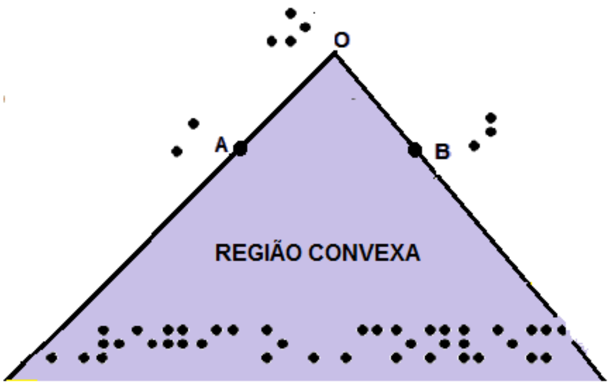


Figura 6.2.4-09: Dos semirrectas con origen en punto "O" definiendo dos regiones en un plano: una de ellas es convexa.

y, la otra, es cóncava o entrante

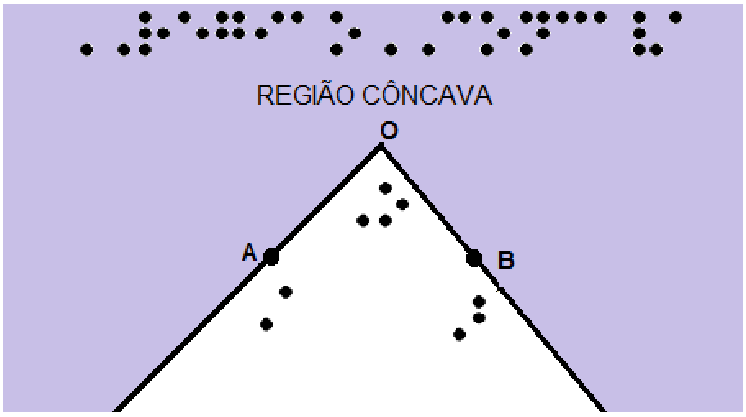


Figura 6.2.4-10: Dos semirrectas con origen en un punto “O” definiendo dos regiones en un plano: una de ellas es cóncava.

Les hice notar que en la región convexa, cualesquier que sean los puntos X e Y considerados, se verifica siempre que el segmento de línea [XY] está totalmente contenido en esa región y que idéntica afirmación no puede ser formulada relativamente a la región cóncava, porque hay situaciones en que el segmento de recta puede no quedar completamente contenido en esta región, como se muestra en la siguiente figura.

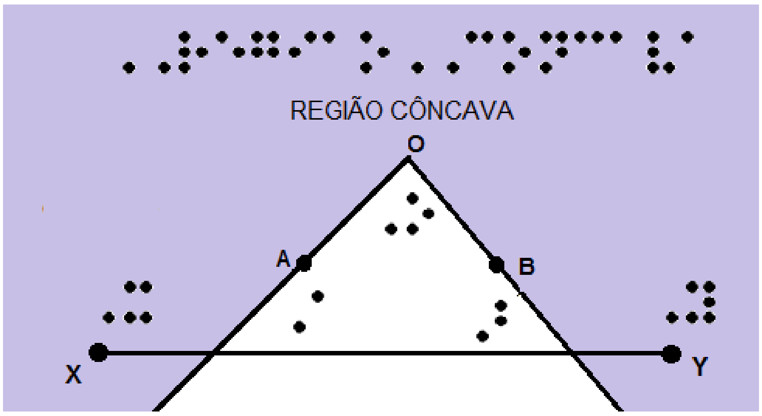


Figura 6.2.4-11: Dados dos puntos X e Y, pertenecientes a la región cóncava, no siempre el segmento de recta [XY] queda totalmente contenido en esta región.

Expuse que, generalmente, cuando hay una referencia a un ángulo del vértice **O** y lados **OA** y **OB**, a menos que se especifique lo contrario, se entiende que se trata del ángulo convexo; y en caso de pretender explicitar, tanto el ángulo convexo, como el cóncavo, puede introducirse, en cada región, un número o una letra, latina o griega, para que no haya ambigüedad alguna.

Refiérase que en el sistema Braille la codificación de un ángulo[155] se hace anteponiendo la designación del ángulo por el símbolo compuesto (45, 25). Así, por ejemplo, el "ángulo a" tiene la codificación (45, 25, 1); la codificación del “ángulo 1" es (45, 25, 3456, 1) y en la codificación del ángulo "ABC" se tiene (45, 25, 26, 46, 46, 1, 12, 14, 35) con las letras "A", "B" y "C" encuadradas por paréntesis auxiliares representados por los símbolos (26) y (35).

En la figura siguiente, por ejemplo, se colocó la etiqueta de "1" en la región convexa y la etiqueta “2” y en la región cóncava. De este modo puede indicarse por ángulo 1, el ángulo convexo, el por ángulo 2 el ángulo cóncavo.

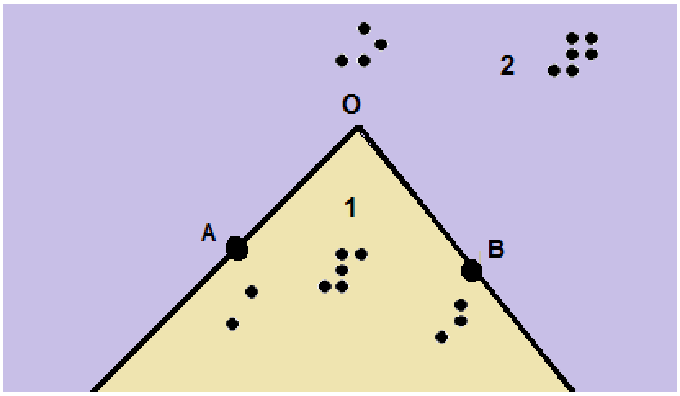


Figura 6.2.4-12: Dos semirrectas con origen en un punto “O” definiendo dos regiones en un plano: una convexa y la otra cóncava. En la región convexa fue inscrito el número 1 y, en la región cóncava, el número 2.

Dije a los alumnos, que un ángulo, además del vértice y de los lados, tiene otra característica muy importante: **la amplitud**. Su medida se traduce por un valor numérico referente a un determinado sistema de unidades. Uno de esos sistemas es el sistema sexagesimal que tiene el grado, como unidad principal.

Señalé que si dividimos un ángulo recto en noventa partes iguales, cada una de ellas constituye un grado de ángulo. Por lo tanto, puede definirse grado como un ángulo que tiene una amplitud igual a la nonagésima parte de la amplitud de un ángulo recto. En el sistema Braille la codificación del grado se hace a través del símbolo (356). Así, por ejemplo, para la representación de 23 grados se tiene la secuencia de símbolos Braille (3456, 12, 13, 356).

[155] Evidencié que es usual la utilización de ∡1 para referirnos el ángulo 1, pero, como el lector de pantalla JAWS[155] no interpreta el símbolo ∡, en los textos de apoyo para los dos alumnos ciegos utilicé, explícitamente, la expresión "ángulo".

Realcé, también, que para designar la amplitud de un ángulo de vértice O y de lados y OA y OB, es usual utilizar la designación AôB (letra "A" seguida de una "O con un acento circunflejo", seguido por la letra "B")[156].

Tuve la oportunidad de señalar, también, que es muy usual utilizar, indistintamente, por ejemplo, las expresiones "**la amplitud del ángulo X es 40 grados**" o "**el ángulo X mide 40 grados**".

Es muy usual, en la enseñanza regular, presentar la noción de ángulo AOB de una forma dinámica. Para este propósito se indica que el ángulo es la porción de un plano generado por la semirrecta OB cuando gira alrededor del punto O, desde la posición de la semirrecta OA, hasta alcanzar una determinada posición.

Así, se admite que, inicialmente, las dos semirrectas OA y OB están superpuestas y que, luego, la semirrecta OB va rodando en una determinada dirección hasta quedar en una determinada posición. La rotación dícese en el sentido directo o positivo cuando se realiza de manera similar a la rotación de la tierra (contraria a las agujas de un reloj) y que se hace en el sentido indirecto o negativo cuando se realiza según la orientación de las agujas de un reloj.

Con posterioridad, se ejemplifican siete casos muy específicos, que tuve la oportunidad de proporcionar a los alumnos:

1º) en el estado inicial, cuando las semirrectas OA y OB son coincidentes, el ángulo en cuestión se dice que es ángulo nulo y su amplitud es de 0 grados;

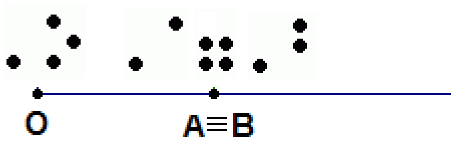


Figura 6.2.4-13: Ángulo nulo de vértice en un ponto O y de lados OA y OB.

[156] Como el lector de pantalla JAWS no interpreta esta señal utilicé en los textos de apoyo para André y el Bento la expresión “amplitude” (amplitud, en castellano).

Figura 6.2.4-14: Manecillas de un reloj constituyendo un ángulo nulo.

2º) la semirrecta OB hace una rotación que no llega a una cuarta parte de vuelta. El ángulo en cuestión es un ángulo agudo. Se trata entonces de un ángulo cuya amplitud tiene un valor mayor que 0 grados y menor que 90 grados;

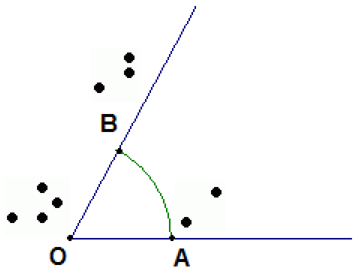


Figura 6.2.4-15: Ángulo agudo de vértice en un punto O e de lados OA e OB.

El arco conectando A y B, que la figura anterior muestra, simula el "rastro" que hace el punto B cuando la semirrecta OB rueda alrededor del punto O.

Figura 6.2.4-16: Manecillas de un reloj formando un ángulo agudo

3º) la semirrecta OB rueda un cuarto de vuelta. El ángulo en cuestión se dice que es ángulo recto y su amplitud es de 90 grados;

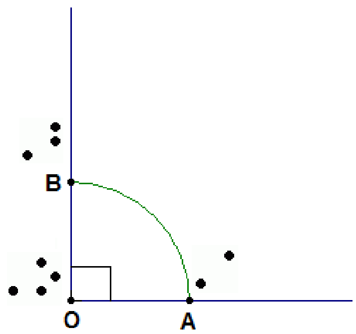


Figura 6.2.4-17: Ángulo recto de vértice en un punto O y de lados OA y OB.

En la enseñanza regular, en términos gráficos, para enfatizar el de que un ángulo determinado es recto, es usual colocar un pequeño cuadrado en el interior del ángulo, en que uno de los vértices asiente en el vértice del ángulo y dos de sus lados apoyados en los lados del ángulo como se destaca en la figura anterior.

Figura 6.2.4-18: Manecillas de un reloj formando un ángulo recto.

4º) la semirrecta OB hace una rotación superior a ¼ (cuarto) de vuelta pero menor que ½ (mitad) de vuelta. El ángulo en cuestión se dice que es obtuso. Su amplitud es un valor mayor que 90 grados y menor de que 180 grados:

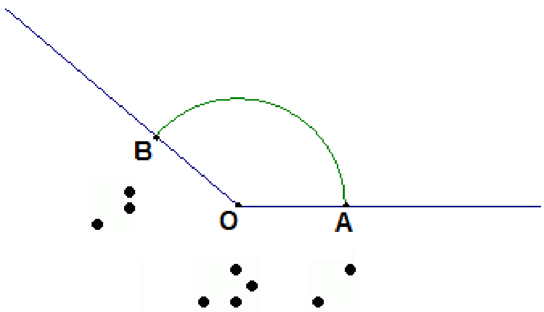


Figura 6.2.4-19: Ángulo obtuso de vértice en un punto O y de lados OA y OB.

Figura 6.2.4-20: Manecillas de un reloj formando un ángulo obtuso.

5º) la semirrecta OB rueda mitad de vuelta. El ángulo en cuestión se dice ángulo llano y su amplitud es de 180 grados. En esta situación las semirrectas OA y OB están, naturalmente, sobre la misma recta, pero en sentidos opuestos.

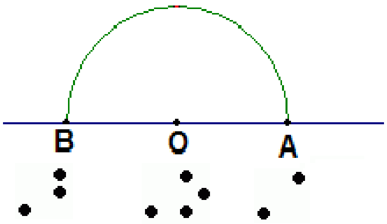


Figura 6.2.4-21: Ángulo llano de vértice en un punto O y de lados OA y OB.

Figura 6.2.4-22: Manecillas de un reloj formando un ángulo llano.

6º) la semirrecta OB hace una rotación superior a la mitad de vuelta pero inferior a una vuelta. Está en juego un ángulo cóncavo. Su amplitud es un valor superior a 180 grados e inferior a 360 grados.

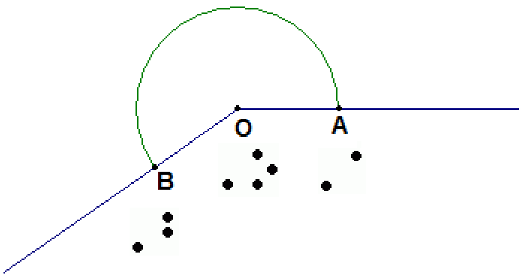


Figura 6.2.4-23: Ángulo cóncavo de vértice en un punto O y de lados OA y OB.

Figura 6.2.4-24: Manecillas de un reloj formando un ángulo cóncavo considerando que la manecilla de los minutos rodó en el sentido derecho a partir de la posición ocupada por el puntero de las horas.

7º) la semirrecta OB rueda una vuelta completa. El ángulo en cuestión se dice ángulo completo, o ángulo de un giro, y su amplitud es de 360 grados.

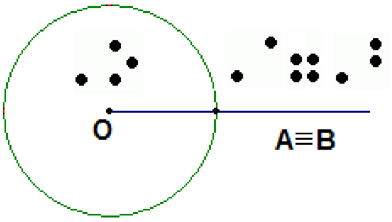


Figura 6.2.4-25: Ángulo de un giro de vértice en un punto O y de lados OA y OB.

Para la medición de ángulos, presenté dos transportadores, adecuados para personas ciegas, uno posibilitando la lectura de ángulos con amplitudes de 0 a 180 grados y otro contemplando las amplitudes de 0 a 360 grados. Ambos contemplan divisiones de tal modo que dos divisiones consecutivas corresponden a 5 grados.

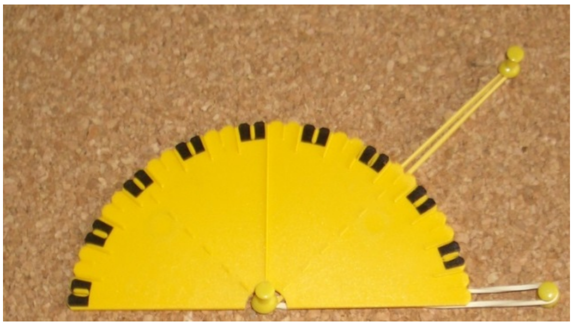


Figura 6.2.4-26: Transportador apropiado a las personas ciegas contemplando amplitudes de 0 a 180 grados.

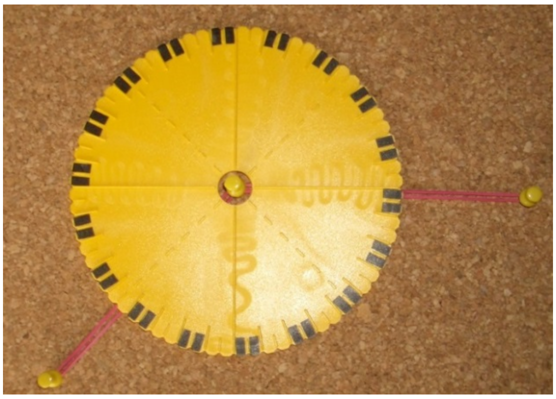


Figura 6.2.4-27: Transportador apropiado a las personas ciegas contemplando amplitudes de 0 a 360 grados.

En cuanto al estudio de los ángulos hay algunas nociones que tienen particular interés:

- ángulos adyacentes,
- ángulos complementarios,
- ángulos suplementarios y
- bisectriz de un ángulo.

En este sentido fueran expuestas las siguientes definiciones:

- Dos ángulos son adyacentes cuando tienen en común, solamente el vértice y un lado.

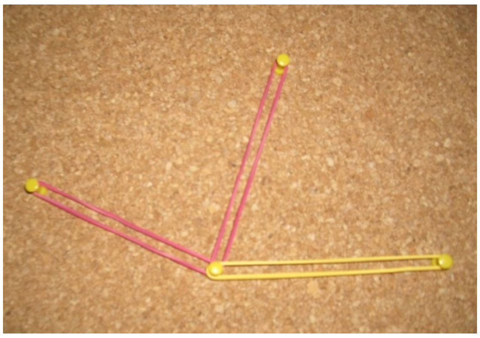


Figura 6.2.4-28: Representación de dos ángulos adyacentes.

- Dos ángulos se dicen complementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a 90 grados. Cuando son también, adyacentes, como ilustra la siguiente figura, forman, en su conjunto, un ángulo recto.

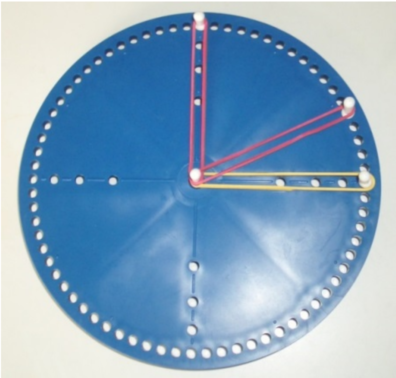


Figura 6.2.4-29: Representación de dos ángulos adyacentes y complementarios.

- Dos ángulos se dicen suplementarios cuando la suma de sus amplitudes es 180 gados. Cuando son, también, adyacentes, tal como lo indica la figura siguiente, forman, en su conjunto, un ángulo llano.

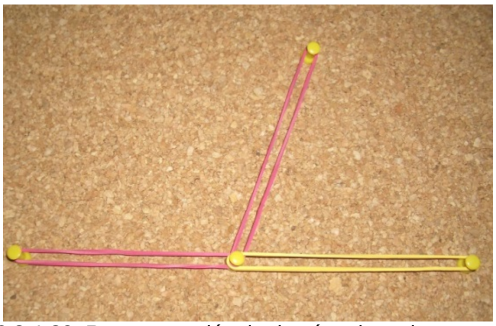


Figura 6.2.4-30: Representación de dos ángulos adyacentes y suplementarios

- La bisectriz de un ángulo es la semirrecta, con origen en el vértice del ángulo, que lo divide en dos ángulos de igual amplitud.

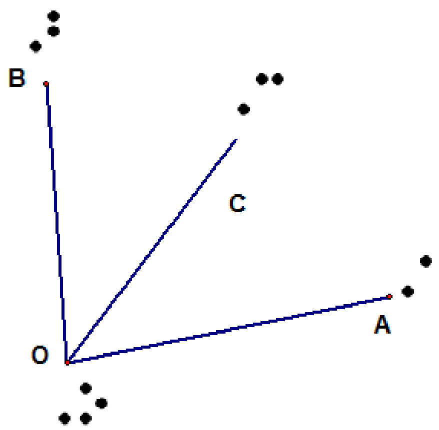


Figura 6.2.4-31: Ángulo AOB y la respectiva bisectriz OC

6.2.5 - Sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante

El objetivo del estudio inherente a esta sección fue proporcionar conocimientos que serán utilizados para demostrar que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180 grados.

Inicialmente indicamos que, si consideramos en un plano dos rectas r y t, no paralelas, las mismas se cruzan en un punto formando cuatro ángulos. Los ángulos opuestos dos a dos son congruentes entre sí, es decir, son geométricamente iguales y por lo tanto tienen igual amplitud.

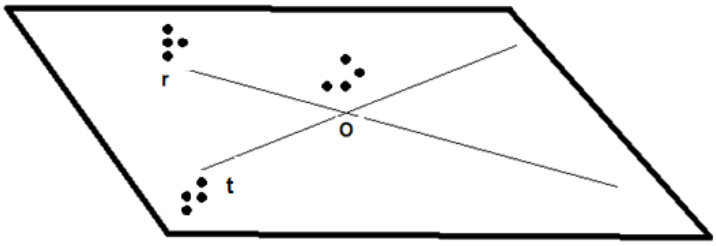


Figura 6.2.5-01: Dos rectas r e t, se intersectando en un punto O y definiendo cuatro ángulos, geométricamente iguales los que son opuestos.

Después consideré un sistema constituido por dos rectas paralelas r y s rectas intersectadas una recta secante t.

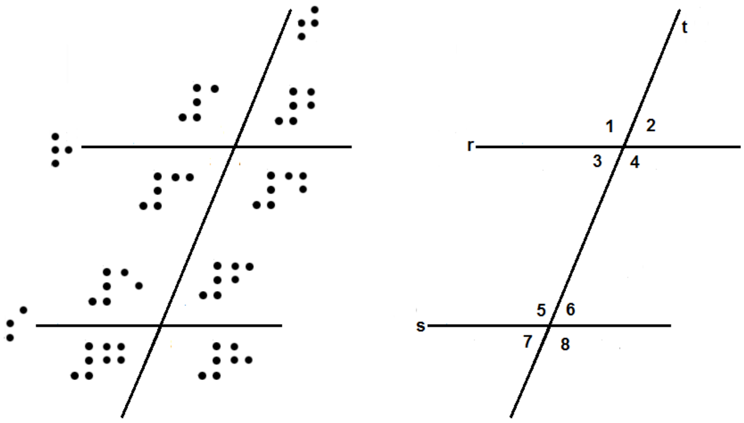


Figura 6.2.5-02: Sistema de dos rectas paralelas r y s intersectadas por una secante t.

En el ámbito de este sistema tuve la oportunidad de presentar las siguientes definiciones:

- **ángulos correspondientes**,
- **ángulos alternos internos**,
- **ángulos alternos externos.**

A los alumnos se les indicó que:

- son ángulos correspondientes aquellos que están del mismo lado de la recta secante y que, relativamente a la recta paralela a que acenrelación, están en la misma posición relativa. Así, han verificado que son correspondientes los ángulos 1 y 5; 2 y 6; 3 y 7 y, también, 4 y 8 y que los ángulos correspondientes son congruentes;

- son ángulos alternos internos aquellos que están en lados opuestos de la recta secante y se encuentran en la parte interior del sistema de rectas en cuestión. Verificaron que en esta situación están los ángulos 3 y 6, así como 4 y 5 y que los ángulos alternos internos, también son congruentes;

- son ángulos alternos externos aquellos que están en lados opuestos de la recta secante y se encuentran en la parte interior del sistema de líneas rectas en cuestión. Comprobaron que en esta situación están los ángulos 1 y 8 y los ángulos 2 y 7 y que ellos, también, entre sí, son congruentes.

En el decurso de este estudio, además de la figura anterior implementada en relieve en papel térmico, presenté un mecanismo metálico, tal como consta de las dos figuras siguientes, en que se destaca, del lado izquierdo de cada figura, la representación de un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante y, del lado derecho, una asta que permite cambiar las amplitudes de los ángulos del sistema, manteniéndose paralelas las dos astas que representan las rectas paralelas del sistema.

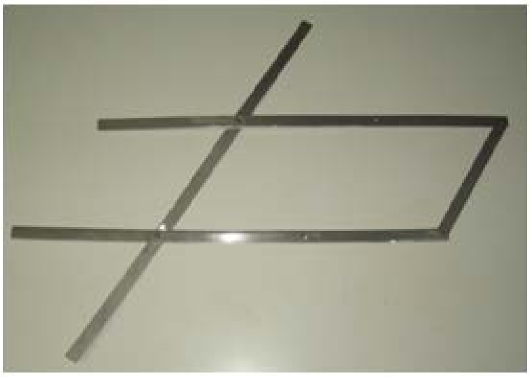


Figura 6.2.5-03: Representación, a través de un mecanismo metálico, de un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante.

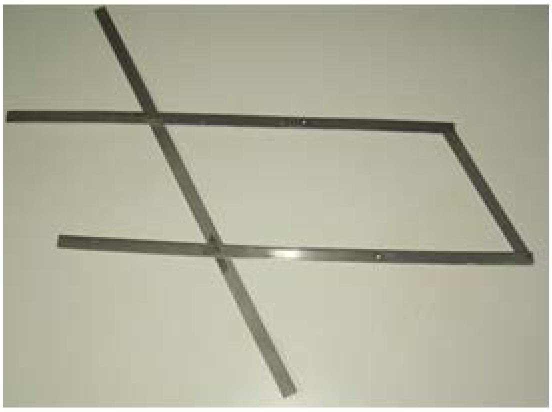


Figura 6.2.5-04: Representación, a través de un mecanismo metálico, de un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante, obtenido a partir del sistema representado en la figura anterior por manipulación del asta de control.

Los conocimientos inherentes a un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante tienen una aplicación inmediata en la demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados. Para este efecto consideré la figura siguiente donde la semirrecta, que tiene origen en el punto A, que constituye el lado común a los ángulos 4 y 5 y paralela al lado [BC]. De este modo, es posible definir un sistema de dos rectas paralelas (las que contienen la semirrecta y el segmento de recta referidos) intersectadas por una secante (la recta que contiene el lado [AC]). En este sistema, está claro que

- los ángulos de 2 y 4 son alternos internos, luego son congruentes;
- los ángulos 3 e 5 son correspondientes, luego son, también, congruentes.

Dado que amplitud 1 + amplitud 4 + amplitud 5 = 180 (grados) se tiene que amplitud 1+ amplitud 2 + amplitud 3 = 180 (grados).

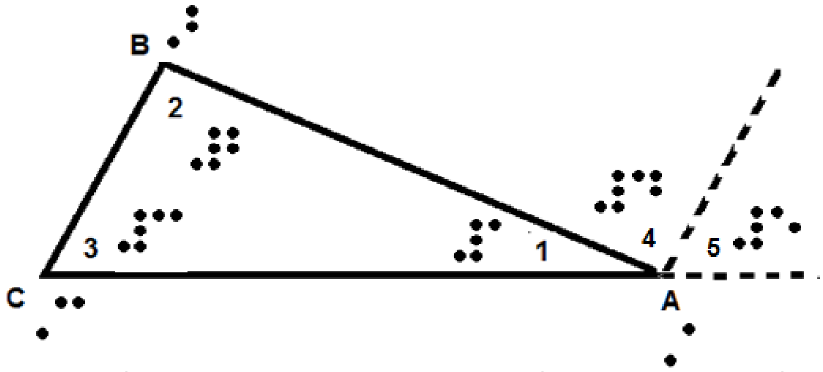


Figura 6.2.5-05: Demonstración de que la suma de las amplitudes de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados.

Esta figura puede ser presentada en papel térmico evidenciando en relieve las señales Braille, los lados del triángulo y las líneas auxiliares en trazo interrumpido. De modo similar al mecanismo metálico anterior, también, en este ámbito, fue presentado a los alumnos un triángulo cuyos lados son representados por tiras metálicas fijas, surgiendo acopladas a uno de sus vértices (el vértice A, en la siguiente figura) dos tiras metálicas móviles.

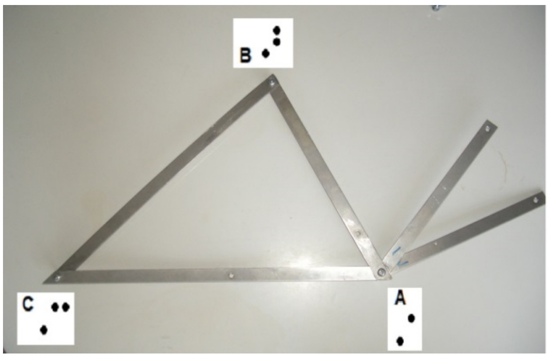


Figura 6.2.5-06: Tres tiras metálicas fijas formando un triángulo y dos tiras metálicas móviles.

Poniendo una de las tiras metálicas, en la prolongación de uno de los lados (por ejemplo, [AC]) y la otra tira paralela al lado, con la cual no está en contacto (el lado [BC]) se obtiene una representación geométrica similar a la referida en la figura 6.2.5-05.

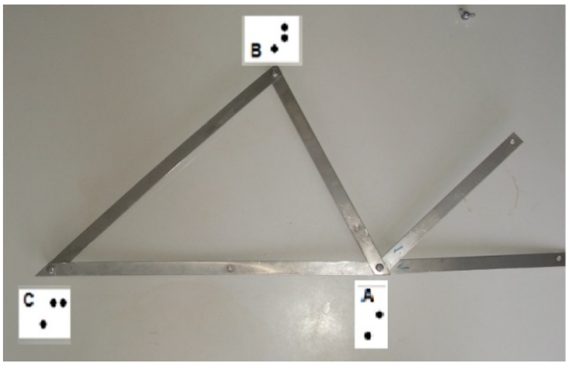


Figura 6.2.5-07: Esquema metálico posibilitando la demonstración que la suma de las amplitudes de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados.

Los alumnos de la APEDV tuvieron la oportunidad de verificar que, para la demostración de en cuestión, también una de las tiras metálicas podría ser colocada en la prolongación del otro lado (el lado [AB]) y la otra tira flexible colocada paralelamente al lado [BC], como se realza en la figura siguiente.

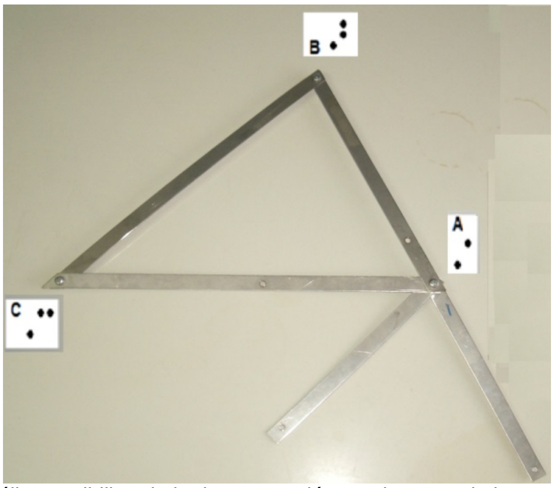


Figura 6.2.5-08: Esquema metálico posibilitando la demonstración que la suma de las medidas de los ángulos Internos de un triángulo es 180 grados.

6.2.6 - Polígonos

6.2.6.1 - Línea Poligonal

A los alumnos fue ofrecida la siguiente definición:

LÍNEA POLIGONAL: Es una secuencia de segmentos de recta [AB], [BC], [CD]... [XX] de tal modo que:

- a cada segmento sucede, como máximo, un único segmento, no colineal con él;
- dos segmentos consecutivos tienen en común un extremo.

Fue expuesto, también, que cada uno de estos extremos se llama **vértice** y que cada segmento tiene la denominación de **lado**.

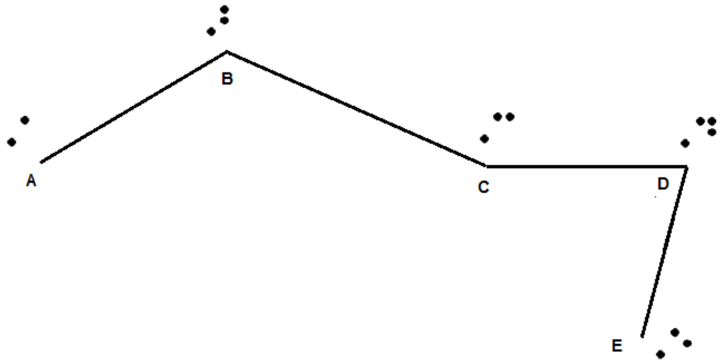


Figura 6.2.6.1-01: Línea poligonal abierta [AB], [BC], [CD], [DE].

También se indicó, que la longitud de una línea poligonal es la suma de las longitudes de los segmentos de línea que la componen.

Paralelamente fue presentada una cinta métrica, que la figura siguiente muestra, con base en la cual se representa diversas líneas poligonales e, inclusive, fueron determinados, también, sus respectivos perímetros.

Figura 6.2.6.1-02: Cinta métrica articulada utilizada para representación de líneas poligonales.

Fue realzado que la línea poligonal dícese **abierta** cuando el extremo inicial y el extremo final no son coincidentes y dícese **cerrada** cuando los extremos, inicial y final, coinciden. En este caso, puede utilizarse cualquier vértice como extremo inicial y extremo final.

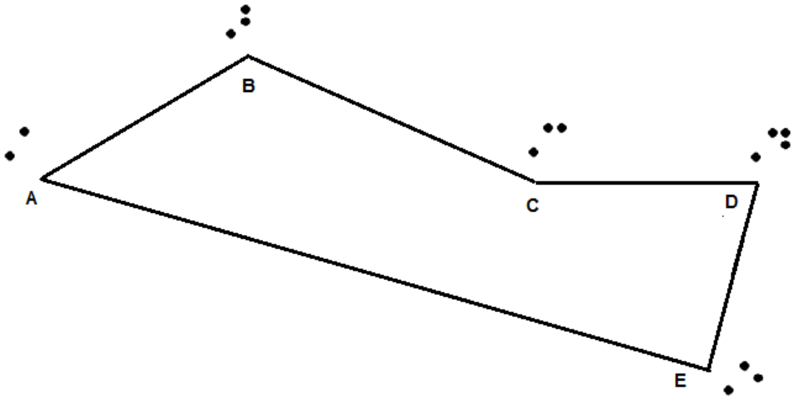


Figura 6.2.6.1-03: Línea poligonal cerrada [AB], [BC], [CD], [DE], [EA].

Se dijo, también, que la línea poligonal dícese simple cuando, además de los vértices relativos a lados consecutivos no hay más puntos en común entre cualesquier otros dos lados. Las dos figuras anteriores muestran líneas poligonales simples, una abierta y otra cerrada, habiendo simulado estas situaciones a través de la cinta métrica articulada.

Se mencionó también, que cuando en una línea poligonal hay dos lados que tienen en común un punto que no es extremo, entonces la línea poligonal no es simple tal como evidencia la figura siguiente.

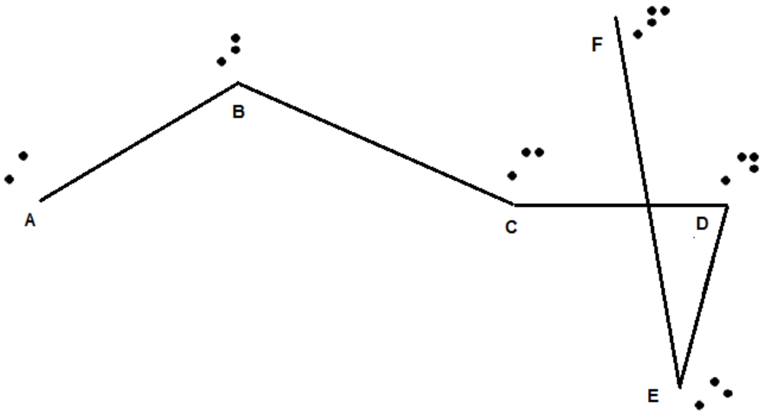


Figura 6.2.6.1-04: Línea poligonal abierta no simple [AB], [BC], [CD], [DE], [EF].
Los segmentos de recta [CD] y [EF] se intersectan

6.2.6.2. - Definición de Polígono

Los alumnos no tuvieron ninguna dificultad en aceptar que una línea poligonal cerrada simple divide el plano en dos regiones, una delimitada designada por "**parte interior**" y la otra denominada por "**parte exterior**" y que, en lo relativo a cada una de estas partes, la línea poligonal se denomina "**frontera**".

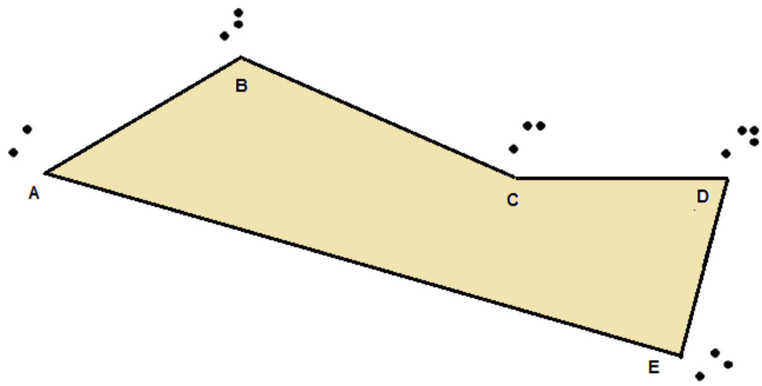


Figura 6.2.6.2-01: El polígono [A B C D E] es la conjunción de una línea poligonal cerrada simple [AB], [BC], [CD], [DE], [EA] con la parte que es interna.

Se expuso que la "parte interior", conjuntamente con la línea poligonal, constituye un **polígono** y que los vértices y los lados de la línea poligonal son, respectivamente, los **vértices** y los **lados** del polígono.

Fue señalado, también, que la expresión "**polígono**" deriva del griego antiguo y resulta de la junción de "poli" que significa "muchos" y "gono", que se refiere a "ángulo".

Los alumnos aceptaron, con naturalidad, que el perímetro de un polígono es la longitud de la línea poligonal que lo delimita. En esa ocasión tuve oportunidad de explicar que el término “**perímetro**” deriva del griego antiguo a partir de la concatenación de dos términos “**peri**”, significando “**alrededor**” y de “**metro**”, que significa “**medida**”.

Para el área de una región del plano, en general, y de un polígono, en particular, he mencionado dos proposiciones cuyo contenido no han tenido ninguna dificultad en aceptar.

AXIOMA 7: El área de un rectángulo de lados con medidas a y b es a × b**.**

AXIOMA 8: Siendo **R1** y **R2** dos regiones disjuntas entonces el área de su conjunto es la suma de las áreas de cada una de las regiones, es decir, Área (**R1** U **R2**) = área (**R1**) + área (**R2**).

6.2.6.3 - Clasificación de los Polígonos

Se indica que en un polígono existen tantos ángulos interiores cuantos vértices y, por supuesto, cuantos lados. Ello se designa a través de la secuencia de sus vértices encuadrada por paréntesis rectos. Así, para el polígono de la figura anterior se tiene [A B C D E]. Hice notar que en este polígono hay cuatro ángulos convexos (que miden menos de 180° (grados) y un ángulo cóncavo (que mide más de 180 (grados). Tratase, por tanto, de un **cuadrilátero cóncavo**.

A los alumnos les fue indicado que este ejemplo, en el ámbito de nuestro estudio, sería una excepción pues, solamente, iban ser considerados los **polígonos convexos**, es decir, aquellos que en su interior sólo tienen ángulos convexos.

Se mencionó que un polígono se denomina **equilátero** cuando tienen los lados iguales y se dice **equiángulo** cuando tienen los ángulos iguales y, cuando son iguales bien los ángulos o los lados, se denomina **regular** y, como ejemplo, se puso el cuadrado como polígono regular de cuatro lados.

Fue evidenciado, también, que el polígono más simple es el que tiene tres ángulos, y obviamente tres lados, teniendo la denominación de triángulo o de trilátero.

A los alumnos, y en particular a André y a Bento, los dos estudiantes ciegos de la clase, fue realzado que en la grafía matemáticas del Braille se da particular destaque al triángulo, al cuadrado y al rectángulo. Para el triángulo es utilizado el símbolo compuesto (6, 23456); para el cuadrado el símbolo braille (456, 13456) y para el rectángulo el símbolo braille (12346, 13456) con los puntos en relieve sugiriendo la idea de un triángulo, de un cuadrado y de un rectángulo, respectivamente[157].

[157] Esta observación ya fue mencionada en la sección *2.3.9. Representaciones en el ámbito de la Geometría.*

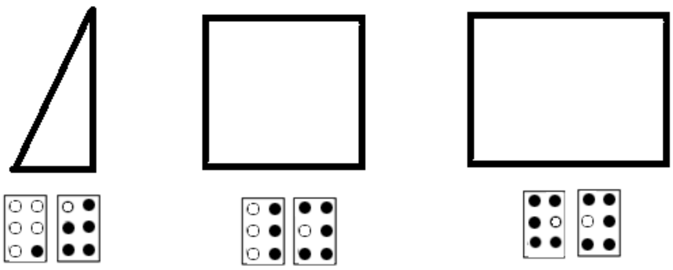


Figura 6.2.6.3-01: Símbolos braille relativos al triángulo, al cuadrado y al rectángulo[158]

Fue, también, indicado que para la designación de un polígono, en general, se utiliza el símbolo compuesto (12346, 135) seguido de la secuencia de letras inherentes a sus vértices y, como ejemplo, se indicó que para la representación del polígono [A B C D E] se utiliza el símbolo compuesto (12346, 135, 46, 46, 1, 12, 14, 145, 15).

En mi opinión un profesor debe quedar satisfecho si la mayoría de sus alumnos conocen el nombre de un polígono con, hasta, por lo menos, 8 lados. En este contexto he mencionado el nombre de cada uno de estos polígonos habiendo señalado que, en la vida cotidiana, tienen muchas aplicaciones prácticas. Así, en este ámbito, además de los ejemplos presentados en la primera clase, he mencionado también, los siguientes:

- el triángulo, en señales de carretera indicadores de peligro;
- el cuadrado y el rectángulo, en azulejos y mosaicos utilizados en las viviendas;
- el pentágono, en uno de los edificios más famosos en todo el mundo, el Departamento de Defensa de los Estados Unidos;
- el hexágono, en las colmenas;
- el heptágono, en algunos tipos de sombrillas;
- el octógono en las señales de carretera indicadores de parada obligatoria, los señales de STOP.

Al mismo tiempo que iba refiriendo cada uno de los tipos de polígonos, iba pasando a los alumnos la representación, en cartulina, de cada uno de ellos.

158 Figura idéntica a la figura 2.3.9-03.

Aún, en el ámbito de la designación de los polígonos, he presentado a los alumnos el conjunto de nombres particulares de algunos polígonos que constan en la tabla siguiente, la cual contempla, naturalmente, las denominaciones que, fueron referidas anteriormente.

Número de lados	**Denominación**
3	trilátero o triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icosígono

He señalado, también, que para otro cualquier tipo de polígono, como uno que tenga, por ejemplo, 36 lados, en lugar de ocuparnos en encontrar su nombre específico podemos designarlo, simplemente por "polígono con 36 lados". En esta ocasión André insistió y pretendió saber el nombre específico de este polígono. Referí, entonces, que el nombre incluye el prefijo **triaconta**, para las tres docenas, el sufijo **hexágono**, para las 6 unidades y el término **kai,** significando **y**, al juntar el prefijo y el sufijo, el resultado sería, pues, **triacontakaihexágono**.

6.2.6.4 - La noción de diagonal de un polígono

He llamado la atención de los alumnos sobre el hecho de que, mientras un segmento de recta que una dos vértices consecutivos forman un lado del polígono, un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos se llama diagonal.

Usando una placa de corcho, alfileres y gomillas, así como polígonos dibujados en papel térmico (véase la figura siguiente), los estudiantes tuvieron la oportunidad de constatar que:

- en un triángulo no hay diagonales;

- en un cuadrilátero, para cada vértice que se considera, hay un vértice no consecutivo, luego ese vértice es el extremo de una sola diagonal;

- en un pentágono, para cada vértice que se considere, hay dos vértices no consecutivos, luego ese vértice es el extremo de dos diagonales;

- en un hexágono, para cada vértice que se considere, hay tres vértices no consecutivos, luego ese vértice es el extremo de tres diagonales.

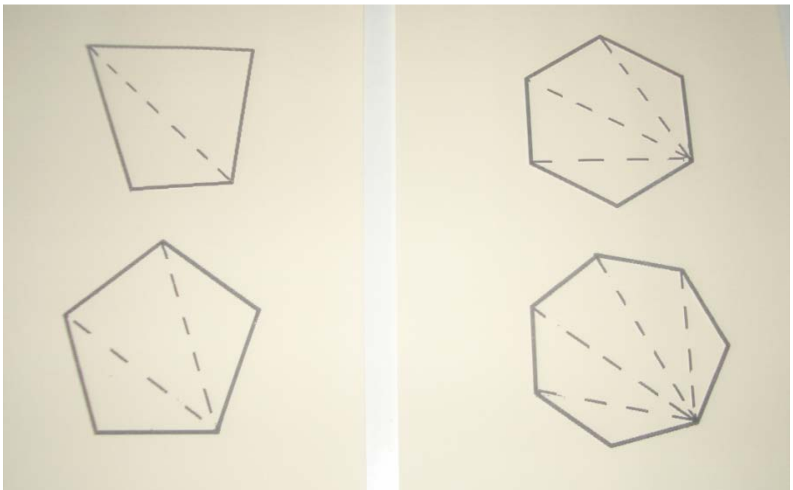


Figura 6.2.6.4-01: Polígonos diseñados en papel térmico

También en el ámbito de este tema, he interrogado a los alumnos acerca de en cuántas diagonales interviene un vértice de un polígono de n lados. André y Daniel respondieron, prontamente, ser n-3.

6.2.7 - Triángulos

6.2.7.1 - Clasificación de los triángulos en cuanto a los ángulos

Interrogué a los alumnos si en un triángulo pueden existir dos ángulos rectos. Después de una pausa André contestó: *cada ángulo recto mide 90 grados, entonces la suma de los dos es 180 (grados) sumando con el tercero da un valor superior a 180 (grados). ¡Luego, no puede ser!*

A través de un raciocinio similar al referido en el párrafo anterior, los alumnos concluyeron que en cualquier triángulo, no pueden existir, ni dos ángulos obtusos, ni un ángulo recto simultáneamente con un ángulo obtuso porque, en cualquiera de las situaciones, la suma de los ángulos internos superaría los 180 grados. De esta manera, fueron llevados a concluir que en un triángulo hay siempre dos ángulos agudos pudiendo el tercer ser agudo, recto u obtuso. He destacado, sin embargo, que en el primer caso el triángulo se dice acutángulo, en el segundo se dice rectángulo y, en el tercero, se clasifica como obtusángulo por lo que

- un **triángulo acutángulo** tiene tres ángulos agudos;
- un **triángulo rectángulo** tiene un ángulo recto y,naturalmente, los otros dos son agudos ;
- un **triángulo obtusángulo** tiene un ángulo obtuso y, obviamente, los otros dos son agudos.

He presentado a los alumnos tres triángulos en cartulina, cada uno de su propio tipo, tal como lo ilustra la figura siguiente.

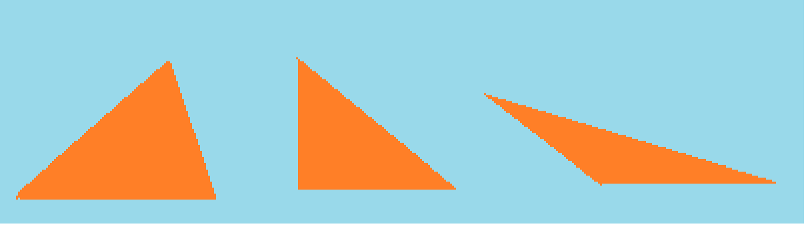


Figura 6.2.7.1-01: Ejemplos de un triángulo, acutángulo, el de izquierda, de un triángulo rectángulo, el intermedio, y de un triángulo obtusángulo, a la derecha.

Después, como actividades, he sugerido que los alumnos dibujasen triángulos en la placa de corcho, con la ayuda de alfileres y gomillas, y preguntasen a sus compañeros cómo los deberían clasificar en cuanto a los ángulos.

6.2.7.2 - Clasificación de los triángulos en cuanto a los lados

Para este efecto fue presentada la siguiente clasificación:

- un triángulo que tenga los lados iguales se denomina **equilátero**;
- un triángulo que tiene dos lados iguales y el tercero desigual se denomina **isósceles**;
- un triángulo con los tres lados desiguales se denomina **escaleno**.

Usando la placa rectangular de multiplano, fueron construidos con alfileres y gomillas, varios triángulos teniendo los alumnos la oportunidad de ver que :

- en un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa;
- en un triángulo al lado más grande se opone el ángulo más grande y viceversa;
- en un triángulo al lado menor se opone el menor ángulo y viceversa;
- en un triángulo la longitud del lado más largo debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

Tuve la oportunidad de señalar que en el triángulo rectángulo el mayor lado tiene la designación de **hipotenusa** y se opone al ángulo recto y que los otros dos lados se llaman **catetos**.

Les he recordado que en la primera clase se hizo referencia a los rectángulos aúreos y que estos rectángulos se caracterizan por el hecho de que la relación entre la longitud y la anchura es el número aúreo. Les mencioné, entonces, que también hay triángulos aúreos: son triángulos isósceles en que la relación entre el lado de longitud más grande y el lado de longitud más pequeña es el número aúreo. Para ello he utilizado, una placa de corcho, tres alfileres, una gomilla y tres tarjetas de cajero automático y, con ellos, he construido dos tipos de triángulos aúreos, uno acutángulo y otro obtusángulo, como muestran las dos figuras siguientes.


Figura 6.2.7.2-01: Triángulo aúreo acutángulo


Figura 6.2.7.2-02: Triángulo aúreo obtusángulo

He referido que, en el caso de los triángulos aúreos, los dos ángulos iguales, los que se oponen a los lados iguales, miden 72 grados, cada uno de ellos, y el ángulo más pequeño mide, pues, 36 grados y que, en el caso de los triángulos aúreos obtusángulos, los dos ángulos iguales miden 36 grados, cada uno de ellos, y que el ángulo más grande mide 108 grados.

En esta ocasión tuve la oportunidad de mostrarles, en cartulina, la representación de un triángulo aúreo, sea acutángulo u obtusángulo.

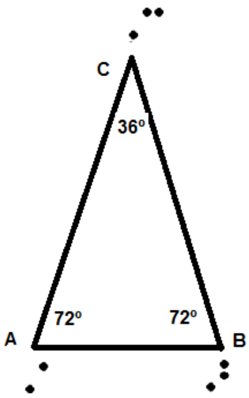


Figura 6.2.7.2-03: Triángulo aúreo acutángulo

Hice notar, también, que la bisectriz de uno de los ángulos de 72 grados divide el triángulo aúreo acutángulo en dos otros triángulos aúreos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

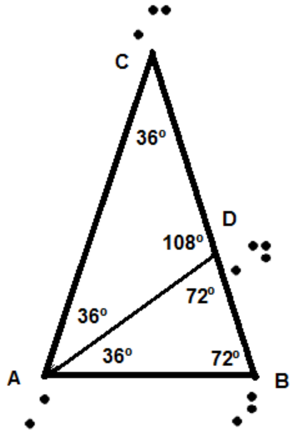


Figura 6.2.7.2-04: Triángulo aúreo acutángulo [ABC] y la bisectriz del ángulo A (de 72 grados) dividiendo el triángulo en dos triángulos aúreos, uno acutángulo [ABD] y otro obtusángulo [ADC].

Después he señalado lo qué es la trisectriz de un ángulo y referí, también, que en uno triángulo aúreo obtusángulo,

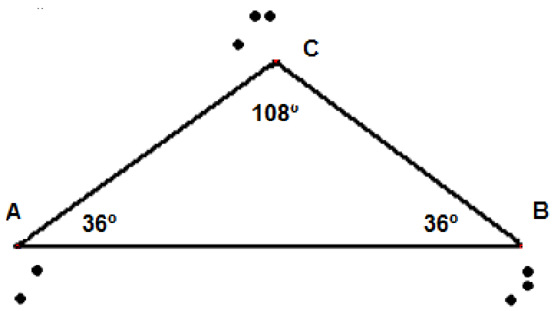


Figura 6.2.7.2-05: Triángulo aúreo obtusángulo

la trisectriz del ángulo de mayor amplitud, el de 108 grados, divide el triángulo en dos triángulos aúreos, uno obtusángulo y otro acutángulo.

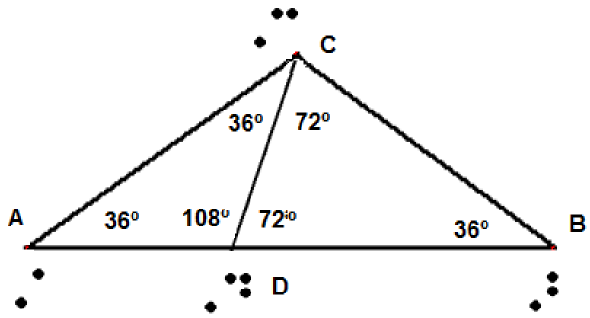


Figura 6.2.7.2-06: Triángulo aúreo obtusángulo [ABC] y la trisectriz del ángulo C (de 108 grados) dividiendo el triángulo en dos triángulos aúreosd, uno acutángulo [BCD] y el otro obtusángulo [ADC].

Aunque el profesor pueda referir solamente a sus alumnos en qué consisten los triángulos aúreos es conveniente que el docente, tenga presente cómo se puede demonstrar que, en un triángulo aúreo, el cociente de la longitud del lado más largo y la longitud del lado más corto es el número aúreo. Para este efecto considérese un pentágono regular inscrito en una circunferencia.

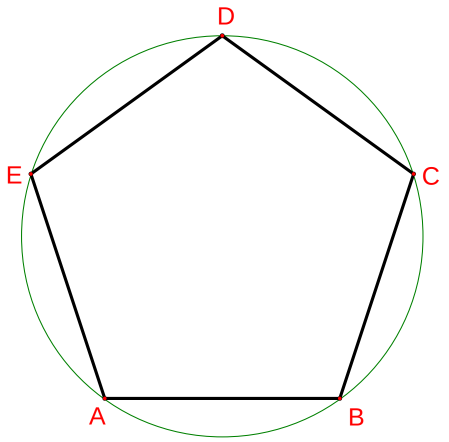


Figura 6.2.7.2-07: Pentágono regular inscrito en una circunferencia

En lo relativo a un vértice dado las dos diagonales que a él corresponden, así como el lado del pentágono que está en la posición opuesta, constituyen un triángulo cuyos ángulos interiores miden 72, 72 y 36 grados. Para ello, a modo de ejemplo, considérese el vértice D.

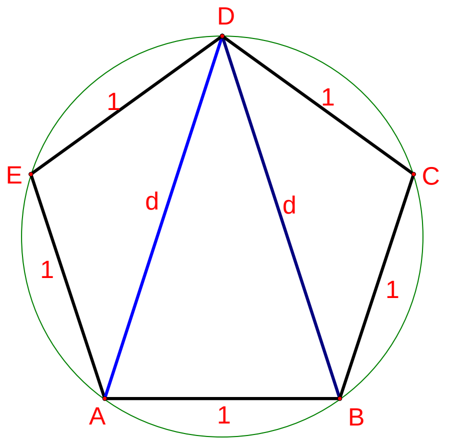


Figura 6.2.7.2-08: Triángulo aúreo [ABD]

Obviamente que, en el triángulo [ABD], los ángulos A, B y D miden 72, 72 y 36 grados, respectivamente, dado que son ángulos inscritos en una circunferencia en que la amplitud del arco de cada uno de ellos es de 144, 144 y 72 grados, respectivamente.

Por una cuestión de simplificación, admítase que la unidad de medida es la longitud de cada lado de los lados del pentágono y admítase, también, para efectos de una simplificación del lenguaje, que en el ámbito de un triángulo isósceles, los lados iguales tienen la denominación de laterales y el tercer lado la designación de base.

Considérese, ahora, la diagonal [AC] y sea F el punto de intersección de esta diagonal con la diagonal [BD].

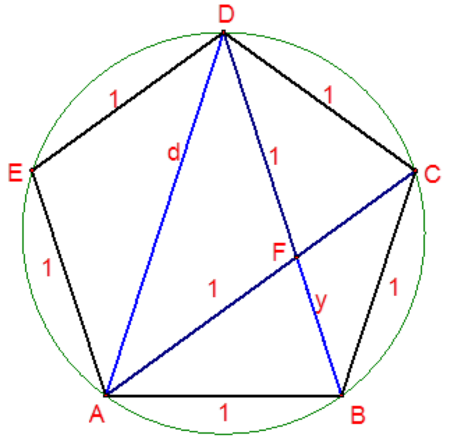


Figura 6.2.7.2-09:Pentágono, donde se destaca el punto F resultante de la intersección de dos diagonales.

Teniendo en cuenta que los ángulos interiores de cada uno de los triángulos [ADE] y [AFD] miden 36, 36 y 108 grados y dado que el lado que se opone al ángulo más amplio de cada uno de los triángulos es común a estos, tenemos que los triángulos son geométricamente iguales por lo que los lados [AF] y [DF] miden una unidad de longitud.

Designando por y la longitud de [BF] se tiene que la longitud de la diagonal [BD] satisface la relación d = 1 + y.

Teniendo en cuenta que el triángulo [BCF] es isósceles se tiene que la longitud del lado [CF] es y.

A su vez, dado que los triángulos [AFD] y [BCF] son similares, puede establecerse la siguiente relación:

$$\frac{\text{longitud [BC]}}{\text{longitud[AD]}} = \frac{\text{longitud [BF]}}{\text{longitud [DF]}}$$

De aquí se deduce que $\frac{1}{d} = \frac{y}{1}$, donde y = $\frac{1}{d}$

La longitud d de una cualquier diagonal satisface, entonces, la igualdad d=1+$\frac{1}{d}$ por lo que d^2 - d - 1 = 0, cuya raíz positiva es el número aúreo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Así se demuestra que en un triángulo isósceles con ángulos interiores de 72, 72 y 36 grados el cociente entre la longitud de su lateral y su base es el número aúreo.

Por otro lado, en un triángulo isósceles de ángulos interiores midiendo 36, 36 y 108 grados (por ejemplo, el triángulo [ADE] contemplado en la figura anterior) el cociente de la longitud de la base y la longitud de uno de sus laterales (d/1) es, también, el número aúreo.

6.2.7.3 - Área de un triángulo

Dado que en el cálculo del área de un triángulo, usualmente, surgen los términos "base" y "altura", es necesario evidenciar lo que cada uno de ellos significa. Así, hago notar que en un triángulo se define la **altura,** como el segmento de recta cuyos extremos son un vértice y la proyección ortogonal de él sobre la recta que contiene al lado opuesto. A este lado se da la denominación de **base**.

Hice notar que como en el triángulo, cualquier lado puede ser utilizado como base, entonces un triángulo contempla, naturalmente, tres bases y a cada base que se considere hay la correspondiente altura del triángulo.

Utilizándose una placa de corcho, alfileres y gomillas los alumnos tuvieron la oportunidad de construir triángulos y para cada lado del triángulo que se considera como base se les solicitó identificar la correspondiente altura. La figura siguiente se refiere a ello.

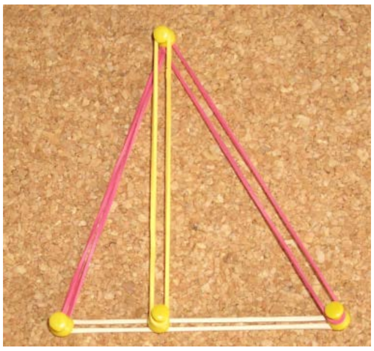


Figura 6.2.7.3-01:Triángulo en que se destaca una de las sus alturas

Después, utilizando triángulos recortados en cartulina, una placa de corcho, hilo y alfileres, les mostré que las rectas que contienen las alturas de un triángulo se encuentran en un punto al cual, se le denomina ortocentro.

Los alumnos tienen la oportunidad de constatar que en el caso de los triángulos acutángulos el ortocentro se encuentra dentro del triángulo,

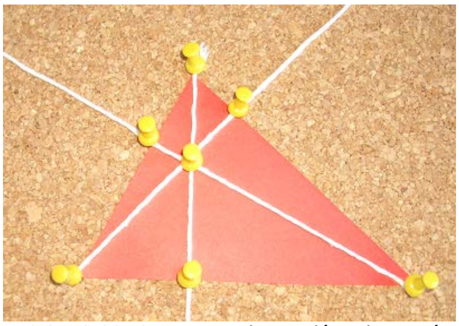


Figura 6.2.7.3-02: Ortocentro de un triángulo acutángulo.

en el caso de los triángulos rectángulos el ortocentro es el vértice del ángulo recto,

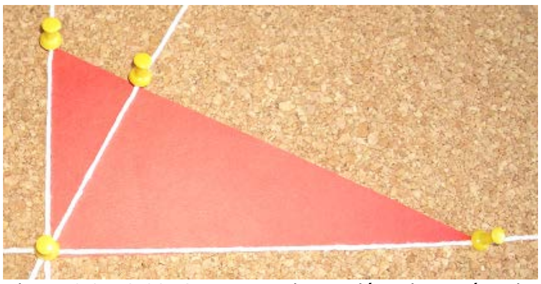


Figura 6.2.7.3-03: Ortocentro de un triángulo rectángulo.

y está situado en la región de fuera del triángulo cuando este es obtusángulo. En esta última situación, para una mejor percepción, se confeccionó en papel cebolla una figura idéntica a la que sigue :

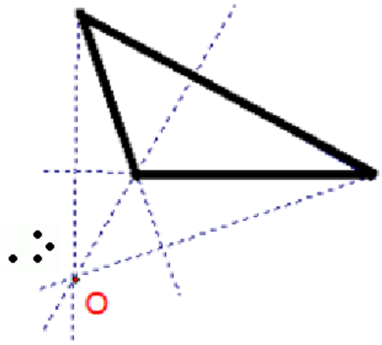


Figura 6.2.7.3-04: Ortocentro de un triángulo obtusángulo.

Se indica, también, que es muy habitual representar la base de un triángulo por la letra "**b**" y la altura correspondiente por la letra "**h**" (por ser ésta la primera letra de la palabra francesa "hauté", o de la palabra inglesa "height", ambas significando "altura").

Utilizando cartulina, hice notar que cualquier triángulo, tal como se ve en la figura siguiente, puede ser insertado en un rectángulo de dimensiones iguales a la base y la altura del triángulo. Así, los alumnos tuvieron la oportunidad de constatar que el área del rectángulo es el doble del área del triángulo por lo que no tuvieron dificultad alguna en aceptar que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura correspondiente.

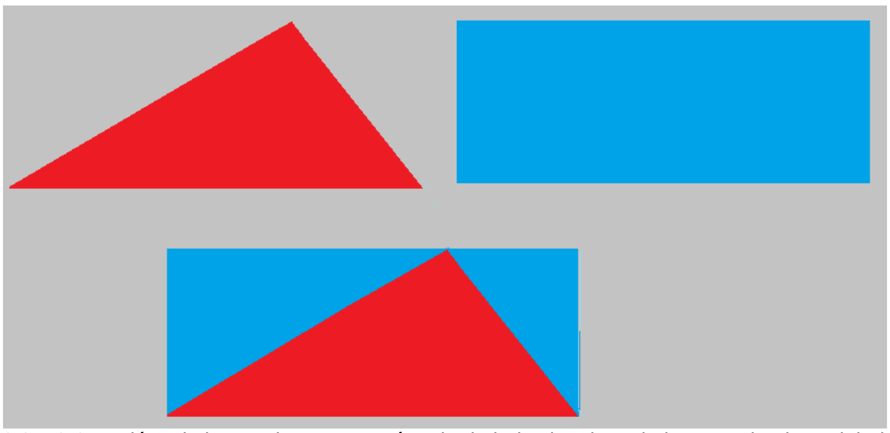


Figura 6.2.7.3-05: Triángulo insertado en un rectángulo de lados iguales a la base y a la altura del triángulo.

Llamé a su atención de que hay otra manera de calcular el área de un triángulo que no requiere la determinación de cualquiera de sus alturas. Se trata de un método llamado método de Herón y que consiste en lo siguiente:

1º se calcula el semiperímetro del triángulo: s = (a + b + c) / 2;

2º se calcula el producto s × (s-a) (s-b) (s-c);

3º el área es la raíz cuadrada del producto anterior.

Como ejemplo de aplicación de este método les he presentado un triángulo, hecho en cartulina, de lados que miden 3, 4 y 5 centímetros, que ellos tuvieron la oportunidad de verificar, utilizando una regla con graduación en relieve. Luego, mediante la aplicación de cada uno de los pasos del método de Herón han constatado que

1º s = (3 + 4 + 5) / 2 = 6 (en centímetros)

2 º 6 × (6-3) × (6-4) × (6-5) = 6 × 3 × 2 × 1 = 36

3º el área es la raíz cuadrada de 36 que es 6 (en centímetros cuadrados).

Hice notar que con la fórmula del Herón es posible determinar, a partir del conocimiento de los lados del triángulo, la altura relativa a uno cualquiera de sus lados. André se quedó perplejo y, entonces yo le dije que, por ejemplo, la altura h, relativa al lado designado por a, es tal que el área del triángulo es:

Área del triángulo = (a×h)/2

Por otro lado, se indica, que el área del triángulo está dada, según la fórmula de Herón, por[159]

Área del triángulo = RaízCuadrada ((s×(s-a)×(s-b)×(s-c)).

Ahora, relacionando las dos expresiones, se obtiene:

(a×h)/2 = RaízCuadrada (s×(s-a)×(s-b)×(s-c))

⇔ a×h = 2 × RaízCuadrada (s×(s-a)×(s-b)×(s-c))

159 Ver nota en la página 211 relativamente al binomio Jaws – Editor de texto usual.

$\Leftrightarrow$ h= (2× RaízCuadrada (s×(s-a)×(s-b)×(s-c))) / a

lo que muestra que el valor h de la altura, referente a una base dada, puede obtenerse a partir del conocimiento de los lados a, b, c.

A título de ejemplo, sugerí que considerásemos el triángulo rectángulo anterior para el cual se pretendía el valor de la altura relativa a la hipotenusa. Atendiendo a que el área del triángulo, en centímetros cuadrados, es 6, entonces su doble es 12 por lo que la altura es 12/5 = 2,4 (centímetros).

6.2.7.4 - Teorema de Pitágoras

Expuse que, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. En este ámbito presenté a los alumnos un conjunto de seis triángulos rectángulos, construidos en cartulina, y he solicitado que midiesen los lados de cada uno de los triángulos y confirmasen lo que el teorema refiere.

Sin embargo, debo decir que, cuando he mencionado el teorema de Pitágoras, los alumnos, con la excepción de Camilo y de Edite, tenían una idea de su enunciado.

En la construcción de los triángulos, que por razones prácticas, he optado por que ninguna de las partes sea superior a 20 (centímetros), usé obviamente ternos pitagóricos, es decir, los números naturales a, b y c, en que $c^2=a^2+b^2$, unos primitivos, tales como (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) y otros no primitivos, como (6, 8, 10), (9, 12, 15) y (12, 16, 20).

Siempre es útil que el profesor tenga presente que, según las fórmulas de Euclides, los ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) pueden obtenerse a partir de las relaciones $a=m^2-n^2$, $b=2mn$ e $c=m^2+n^2$, siendo m y n dos números naturales con m>n, primos entre sí y con diferentes paridades, como se muestra en la tabla siguiente, a través de algunos ejemplos:

m	n	$a=m^2-n^2$	$b=2mn$	$c=m^2+n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41

Obviamente que multiplicando los elementos de un terno pitagórico primitivo dado por un número entero mayor que 1, se obtiene otro ternoo pitagórico que es, naturalmente, no primitivo.

También, en el ámbito teorema de Pitágoras presenté a los alumnos el rompecabezas de Perigal[160] constituido por 6 piezas, similares a lo que se ilustra en la siguiente figura, integrando un triángulo rectángulo, un cuadrado y cuatro trapezoides de igual dimensión, cada uno de ellos, con dos ángulos rectos.

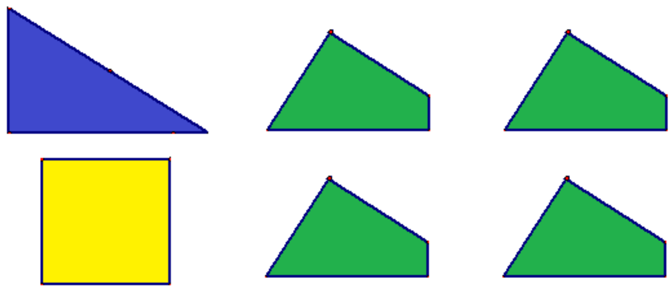


Figura 6.2.7.4-01:Rompecabezas de Perigal para sensibilización del Teorema de Pitágoras (1).

El lado del cuadro es geométricamente igual que uno de los catetos del triángulo rectángulo y los cuatro cuadriláteros forman, en su conjunto, otro cuadrado cuyo lado es geométricamente igual al otro cateto.

Tal como se puede verificar en la figura siguiente, los cuadriláteros con dos ángulos rectos, cada uno de ellos, se obtienen dividiendo este segundo cuadrado a través de dos segmentos de recta, perpendiculares entre sí, intersectándose en el centro del cuadrado y con los extremos apoyados en los lados de éste, de tal modo que uno de los segmentos es paralelo a la hipotenusa del triángulo rectángulo.

[160] PERIGAL (1874).

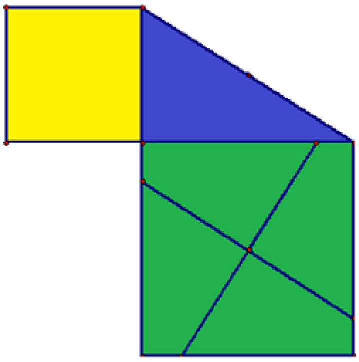


Figura 6.2.7.4-02: Rompecabezas de Perigal para sensibilización del Teorema de Pitágoras (2)

A través de la manipulación, sea del cuadrado, sea de los cuatro cuadriláteros, es posible reconstruir un nuevo cuadrado de lado geométricamente igual a la hipotenusa del triángulo.

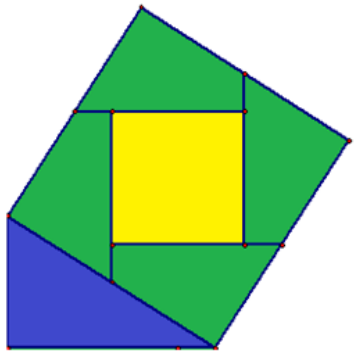


Figura 6.2.7.4-03: Rompecabezas de Perigal para sensibilización del Teorema de Pitágoras (3)

En la figura siguiente se evidencia un conjunto de 6 piezas presentadas en clase y que los formandos tuvieron la oportunidad de manipular.

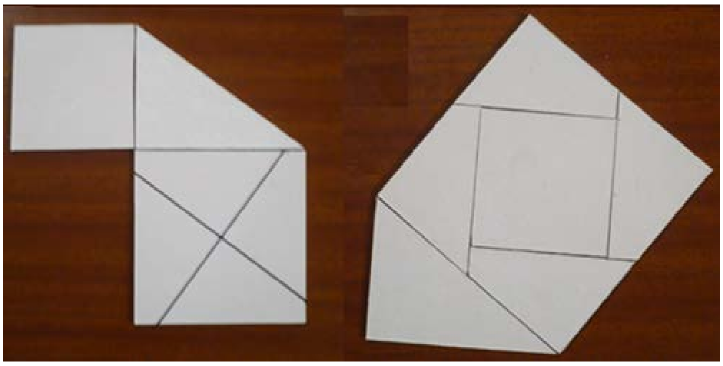


Figura 6.2.7.4-04: Rompecabezas de Perigal presentado en clase.

Como en otras situaciones ya presentadas es útil que el profesor tenga presente una demonstración formal de la legitimidad de este rompecabezas. Para este efecto considérese la figura siguiente.

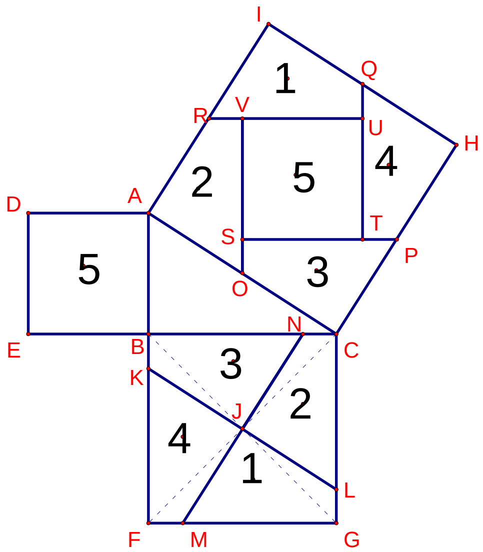


Figura 6.2.7.4-05: Una demostración del Teorema de Pitágoras

El núcleo de la demostración consiste en verificar que

1º los segmentos de recta [MN] y [KL] son geométricamente iguales a los lados del cuadrado [ACHI];

2 º los cuatro cuadriláteros en que se descompone el cuadrado [BFGC] son congruentes (geométricamente iguales) entre sí y congruentes con los cuadriláteros, no cuadrados, insertados en el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa del triángulo rectángulo;

3 º los cuadrados [ADEB] y [UVST] son congruentes.

A este propósito, se considera, en tal caso cada uno de los puntos mencionados.

1 º a) El cuadrilátero [AKLC] es un paralelogramo pues los lados son paralelos dos a dos. Luego el segmento de recta [KL] es congruente con el lado [AC] del cuadrado.

b) Los triángulos [BKJ] y [GLJ] son, obviamente, congruentes porque son similares y tienen dos lados correspondientes, [BJ] y [JG], que son geométricamente iguales una vez que el punto J, resultante de la intersección de las diagonales del cuadrado, biseca cada una de éstas.

c) Los triángulos [NJC] y [MJF] son congruentes porque son similares y tienen dos lados correspondientes, [FJ] y [JC], que son geométricamente iguales, por razones idénticas a las mencionadas en el párrafo anterior.

d) Los triángulos [BKJ] y [MJF] son congruentes porque son similares y tienen dos lados correspondientes iguales [BJ] y [FJ] dado que las diagonales de un cuadrado son geométricamente iguales.

e) Al ser congruentes entre sí los cuatro triángulos [BKJ], [GLJ], [NJC] y [MJF] se tiene, también, que son congruentes los segmentos de recta [K J], [JL], [MJ] y [JN] y, en consecuencia, también lo son [KL] y [MN] por lo que el segmento de recta [MN] es congruente con cualquier lado del cuadrado [ACHI].

2 º Siendo congruentes, entre sí, los cuatro triángulos [BKJ], [GLJ], [NJC] y [FMJ] se tiene que son congruentes los segmentos de recta [BK], [FM], [LG] y [NC] y, en consecuencia, también son congruentes los segmentos de recta [KF] = [BF]-[BK], [MG] = [FG]-[FM], [LC] = [GC]-[LG] y [BN] = [BC]-[NC].

Los cuadriláteros [GLJM], [CNJL], [BKJN] y [FMJK] son, obviamente, congruentes dado que, a partir de uno de ellos y por sucesivas rotaciones de 90 grados, con centro de rotación en el punto J, se obtienen los otros tres.

Por una translación del cuadrilátero [GLJM], siendo el vector de translación JI, se obtiene el cuadrilátero [UQIR] y por translaciones adecuadas de los cuadriláteros [CNJL], [BKJN] y [FMJK] se obtienen, respectivamente, los cuadriláteros [VRAO], [SOCP] y [TPHU].

3º. Dado que el segmento de recta [AK] es congruente con [CL] que a su vez es congruente con [VO] se tiene que éste es congruente con el primero. Pero prestando atención a que [BK] y [SO] son congruentes resultada que [VS] = [VO]-[SO] es congruente con [AB] = [AK]-[BK].

Del mismo modo puede verse que [ST], [TU] y [VU] son congruentes con [AB]. Además, como los ángulos interiores del cuadrilátero [UVST] son rectos, entonces esto es un cuadrado que es congruente con el cuadrado [ABED].

Así se evidencia una demostración del Teorema de Pitágoras, de entre varias posibles, mediante el uso del rompecabezas que arriba fue descrito.

Aún, también, en el ámbito del Teorema de Pitágoras, he tenido la oportunidad de realzar que, hasta hace unas décadas, en la construcción civil, los pedreros para dibujar un ángulo recto, utilizaban una cuerda de 13 nudos. Esta tenía un nudo en cada extremo y la distancia entre cada dos nudos consecutivos podría ser utilizada como una unidad de medida. En el suelo, eran puestas 3 estacas definiendo los extremos de tres segmentos de recta, de tal manera que el primer segmento tenía una longitud de 3 unidades, el segundo, una longitud de 4 unidades y el tercero de 5 unidades. Se formaba, así, un triángulo rectángulo, siendo el ángulo definido por los dos primeros segmentos. Hoy, en día, es muy usual proceder de manera similar, solo que en lugar de una cuerda de 13 nudos, se usa una cinta métrica de pedrero.

En la clase, por medio de una placa de corcho, alfileres y cordel, en el cual fueron hechos trece nudos, igualmente espaciados dos a dos, los alumnos tuvieron oportunidad de ver cómo, con ella, se podría construir un ángulo recto.

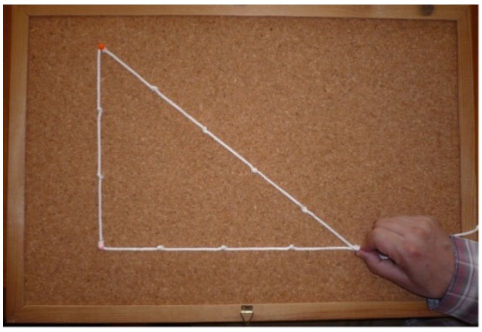


Figura 6.2.7.4-06: Definición de un ángulo recto a partir de una cuerda de 13 nudos.

6.2.7.5 - Sobre triángulos acutángulos y obtusángulos

He presentado a los alumnos un triángulo rectángulo en que los catetos eran representados por dos varillas de metal y la hipotenusa representada por una gomilla interconectando las dos varillas.

Les hice notar que de acuerdo con el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la longitud del elástico era igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las varillas metálicas, a lo que los estudiantes asintieron.

Sugerí, después, que abriesen las varillas de metal para pasar de un triángulo rectángulo a un triángulo obtusángulo y que examinasen si la longitud de la gomilla permanecía igual o cambiaba. Todos han concordado que aumentaba. Entonces les he preguntado: *¿y ahora, el cuadrado de la longitud de la gomilla, será igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las varillas de metal, o diferente?* André, de listo, respondió que era diferente. Insistí, *¿diferente, a mayor o a menor?* Él, entonces, sin dudarlo, dice que iba hacia un valor mayor y todos los alumnos acabaron por estar de acuerdo.

He propuesto, después, la siguiente cuestión: *¿y, si en vez de abrir las varillas, nosotros las cerramos? ¿Qué pasa con la longitud de la gomilla*? Daniel respondió inmediatamente que la longitud disminuía. Todos han asentido y nadie ha tenido dificultad en aceptar que, en estas circunstancias, el cuadrado de la longitud de la gomilla, era menor que la suma de los cuadrados de las longitudes de varillas metálicas.

Les he mencionado, entonces, que en un triángulo es interesante comparar el cuadrado del lado más grande con la suma de los cuadrados de los otros dos, de lo que pueden observarse tres casos:

1º caso: el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. El triángulo es rectángulo (por el teorema de Pitágoras);

2º caso: el cuadrado del lado mayor es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos. El triángulo es obtusángulo;

3º caso: el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos. El triángulo es acutángulo.

A título de ejemplo, los alumnos han reconocido que un triángulo de lados que miden 6, 8 y 10 unidades de longitud, es un triángulo rectángulo, pues satisface el Teorema de Pitágoras, y, si las medidas de los lados fuesen 6, 8 y 11 sería obtusángulo y si los lados midiesen 6, 8 y 9, sería acutángulo.

6.2.7.6 - Centro de gravedad de un triángulo

He comentado a los alumnos que además del ortocentro hay, en el triángulo, otros puntos notables: centro de gravedad (baricentro), centro de la circunferencia inscrita (incentro) y centro de la circunferencia circunscrita (circuncentro).

Para la determinación del centro de gravedad de un triángulo he señalado previamente, la definición de mediana de un triángulo como el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice y he realzado que el centro de gravedad es el punto de encuentro de las medianas.

Con una placa de corcho, con alfileres e hilos de guita he diseñado algunos triángulos y para cada uno de ellos, he solicitado a cada uno de los alumnos determinar el centro de gravedad del triángulo que estaba siendo presentado.

Después, utilizando un triángulo obtusángulo, recortado en cartulina, lo he suspendido con un hilo fino, pendiente por su centro de gravedad, y he evidenciado a ellos que el triángulo, así suspendido, se encontraba en una posición de equilibrio pues su disposición definía un plano horizontal. He repetido el experimento con otros dos triángulos, uno rectángulo y otro acutángulo y el resultado fue idéntico. De este modo los alumnos han concluido que un triángulo suspendido por un hilo pendiente de su centro de gravedad se queda dispuesto según un plano horizontal.

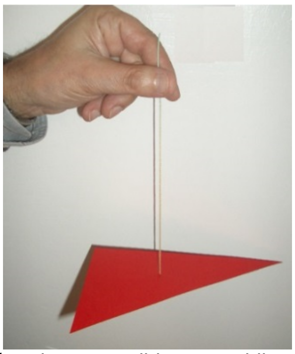


Figura 6.2.7.6-01: Triángulo obtusángulo suspendido por un hilo colocado en su centro de gravedad.

En seguida, con otros tres triángulos, geométricamente iguales a los anteriores, los he suspendido en puntos que no coincidiesen con el centro de gravedad y, entonces, los alumnos tuvieron la oportunidad de constatar que, de este modo, los triángulos ya no quedaban en posición de equilibrio.

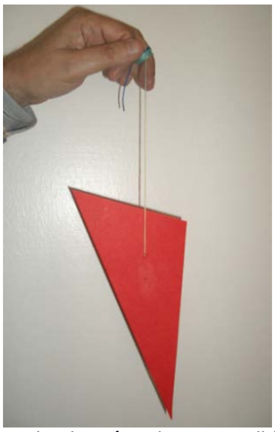


Figura 6.2.7.6-02: Triángulo obtusángulo suspendido por un hilo colocado en un punto diferente al centro de gravedad.

He tenido, también, la oportunidad de señalarles que al centro de gravedad del triángulo, también, se denomina baricentro.

6.2.7.7 - Circuncentro

He hecho notar, que a cada lado de un triángulo se puede asociar una recta perpendicular que a él es perpendicular y lo intersecta en su punto medio y que a tal recta se denomina mediatriz. He señalado, además, que la mediatriz de un segmento de línea se caracteriza por estar constituida por los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento de recta.

A los alumnos les he presentado tres varillas metálicas, representando cada una de ellas un segmento de recta soldando a cada una de ellas un alambre metálico representando la respectiva mediatriz, tal como se muestra en la figura siguiente.

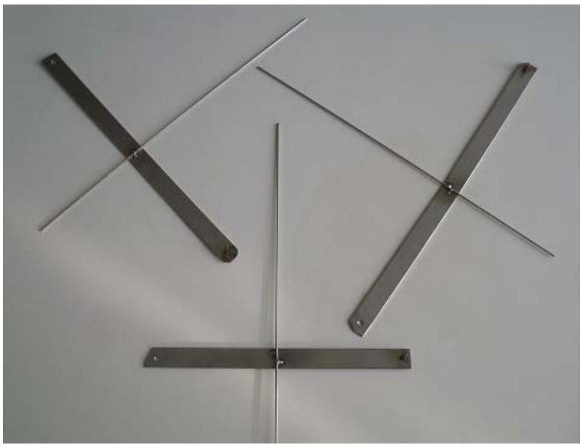


Figura 6.2.7.7-01: Conjunto de 3 barras metálicas representando 3 segmentos de recta a cada uno de los cuales está acoplado un alambre metálico representando la respectiva mediatriz.

Después, construyendo un triángulo con las tres varillas, los alumnos tuvieron la oportunidad de verificar que las mediatrices se encuentran en un punto.

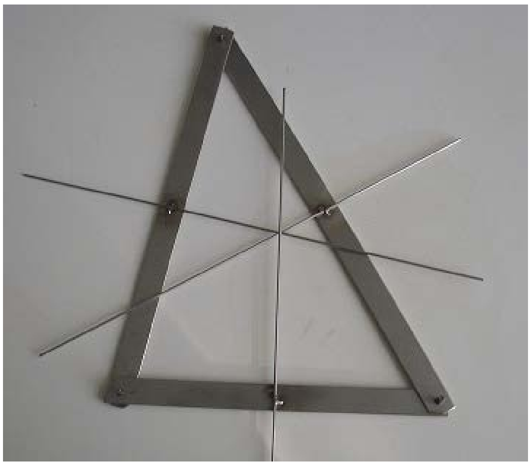


Figura 6.2.7.7-02: Conjunto de 3 barras metálicas representando 3 segmentos de recta a cada una de las cuales está acoplado un elemento metálico representando la respectiva mediatriz.

He referido, entonces, que ese punto tiene la designación de circuncentro del triángulo porque él es el centro de una circunferencia que pasa por los vértices del triángulo y que tiene la denominación de circunferencia circunscrita. Y, para comprobarlo, he presentado la representación de una circunferencia construida con alambre de metal idéntico al utilizado para las mediatrices.

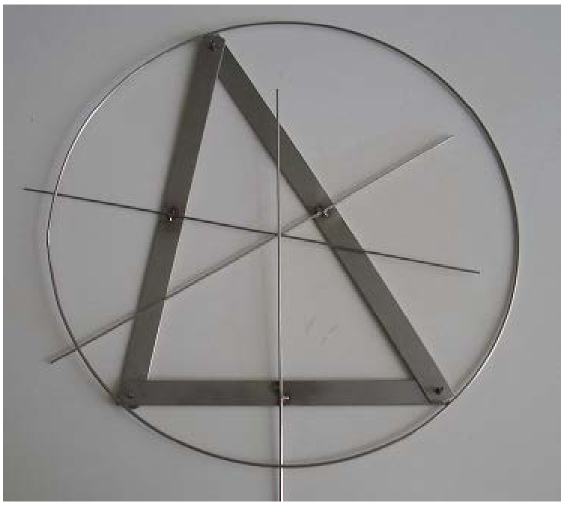


Figura 6.2.7.7-03: Circuncentro y circunferencia circunscrita

6.2.7.8 - Incentro

Llamé la atención de los alumnos que siendo posible la construcción de una circunferencia circunscrito a un triángulo, también es posible construir una circunferencia inscrita. El centro de esta circunferencia es, precisamente, el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo. Para este efecto, utilizando papel cebolla, he presentado el diseño de un triángulo, donde he incluido las bisectrices de los ángulos internos y la circunferencia inscrita.

También he presentado, en una placa de corcho, un triángulo construido en cartulina, en cuyos vértices he colocado alfileres. Después, he utilizado una pieza circular, como representación del círculo inscrito (tal como la figura siguiente evidencia) e hilos, ligando los vértices con el centro del círculo inscrito, representando las bisectrices de los ángulos internos del triángulo.

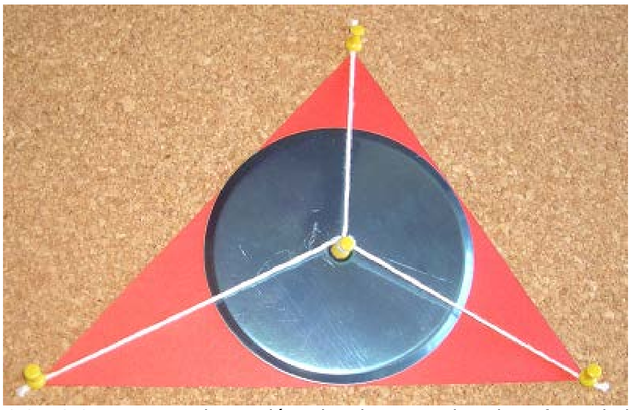


Figura 6.2.7.8-01: Incentro de un triángulo y la respectiva circunferencia inscrita

6.2.8 - Cuadriláteros

6.2.8.1 - Clasificación de cuadriláteros

A cada uno de los alumnos he presentado una colección de cuadriláteros, como se evidencia en la figura siguiente, comprendiendo un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo propiamente dicho, un rombo o losange, un trapecio rectángulo, un trapecio escaleno, un trapecio isósceles y dos trapezoides siendo, uno de ellos, un cometa.

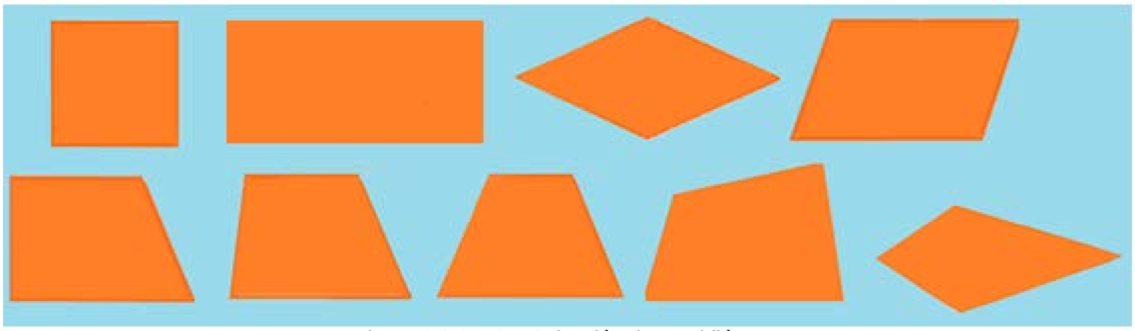


Figura 6.2.8.1-01: Colección de cuadriláteros.

He solicitado, después, que cada uno agrupase los cuadriláteros de acuerdo con un criterio de su elección.

André juntó el cuadrado y el rombo en una clase y todos los demás en otra clase. En cuanto al criterio me indicó que los dos primeros tienen los lados iguales, mientras los otros no los tienen.

Bento juntó los paralelogramos y los trapecios en una clase y los trapezoides en otra clase. Como criterio refirió que los cuadriláteros de la primera clase tienen los lados paralelos (por lo menos dos, era lo que pretendía destacar) mientras los cuadriláteros de la segunda clase no lo tenían.

Daniel, a su vez, juntó el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo (propiamente dicho) y el rombo en una clase y los restantes en otra. El criterio utilizado fue el de constituir la primera clase con cuadriláteros con dos pares de lados paralelos.

Francisca juntó el cuadrado y el rectángulo en una clase y los restantes en otra clase. El criterio que utilizó fue el de juntar en una clase los cuadriláteros solamente con ángulos rectos, y colocar los restantes en una segunda clase.

Camilo y Edite dividieron los cuadriláteros en dos clases pero no supieron explicar los criterios que habían utilizado pues la división, que cada uno realizó, fue hecha sin un criterio lógico que la soportase.

Pedí, entonces, que cada uno de los alumnos organizase las dos clases según el criterio presentado por André. Después pedí que cada uno reorganizase la colección según el criterio de Bento; luego a continuación pedí que tuviesen atención sobre la clasificación de Daniel y, por fin, he solicitado que la reorganización fuese hecha de acuerdo con la clasificación presentada por Francisca.

Resalté, también, cómo ellos pudieron comprobar, que no hay una única clasificación de los cuadriláteros, pues, todo depende de los criterios para la definición de las clases. En este contexto, hice notar que una de las clasificaciones más utilizadas fue la que Daniel presentó: una clase constituida por los cuadriláteros con dos pares de lados paralelos, la clase de los paralelogramos y otra clase constituida por los restantes cuadriláteros, la clase de los no paralelogramos.

Invité a los alumnos, de nuevo, a dividir cada colección de modo que tuvieran los paralelogramos en un lado y los no paralelogramos en el otro y les he alertado que los cuadriláteros que no son paralelogramos también se podrían subdividir en dos subcolecciones. En esta ocasión Daniel mencionó que unos tienen un par de lados paralelos y los otros no tienen lados paralelos. He concordado y he remarcado que los cuadriláteros con un solo par de lados paralelos son trapecios y los que no tienen ningún lado paralelo tienen la designación de trapezoides.

Les he comentado, luego, que podríamos dividir los cuadriláteros en tres clases: paralelogramos, trapecios y trapezoides. La primera, la de los paralelogramos, encuadra todos los cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos; la segunda, a de los trapecios, engloba todos los cuadriláteros con un único par de lados paralelos y la tercera, la clase de los trapezoides, contempla los cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos.

6.2.8.2 - Los paralelogramos

Pedí a los alumnos que analizaran los cuatro cuadriláteros de la clase de los paralelogramos y que los agrupasen en dos subclases como entendiesen más conveniente. André, de modo similar a lo que había hecho inicialmente, separó los cuadriláteros con los lados iguales (cuadrado y rombo) de los que no tenían lados iguales (el rectángulo y el paralelogramo propiamente dicho. A su vez, Bento, Daniel y Francisca han juntado el cuadrado con el rectángulo y el paralelogramo propiamente dicho con el rombo.

Camilo y Edite han vacilado en el modo de agrupar los cuatro cuadriláteros en juego. Por esta razón les he indicado que, como criterios, sus compañeros habían mencionado dos:

- tener o no tener todos los lados iguales (criterio de André),
- tener o no tener ángulos internos iguales (criterio de Bento, Daniel y Francisca).

Después, he solicitado que analizásemos en conjunto las características de cada uno de los cuatro tipos de paralelogramos, concluyendo que:

- el cuadrado se distingue por tener lados iguales y los ángulos internos, también, iguales pues todos ellos son rectos;
- el rectángulo se caracteriza por tener lados iguales dos a dos y los ángulos internos todos iguales;
- el paralelogramo, propiamente dicho, tiene los lados iguales dos a dos y los ángulos internos, también, son iguales dos a dos;
- el losange tiene todos los lados iguales pero los ángulos son iguales, solamente, dos a dos.

Como nota indico que todos conocían el cuadrado y el rectángulo, algunos se recordaban de la designación “paralelogramo”, pero sólo para Daniel no fue extraña la designación de "losange”, aunque lo fuese la designación de "rombo".

Después de que cada uno de los alumnos hubiera analizado los diversos tipos de paralelogramos he sugerido que procediesen al cálculo del perímetro y del área de cada uno de los paralelogramos que a ellos fue presentado. Para tal efecto André y Benito utilizaron una regla propia para personas ciegas, caracterizada por la distancia entre dos divisiones consecutivas de 0,5 centímetros, mientras Camilo, Daniel, Edite y Francisco, con la ayuda de una lupa, utilizaran una regla con un graduación más fina, siendo de 0,1 cm. la distancia entre dos divisiones consecutivas.

En lo que concierne al área he mencionado que hay una premisa fundamental, universalmente aceptada, que ya había sido referida anteriormente, en forma de axioma, que establece que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho y que, aplicado a los cuadrados, toma la forma

Área del cuadrado = lado × lado (lado al cuadrado)

He aprovechado la oportunidad para referirles, que siendo conocida el área de un cuadrado es posible determinar el valor del lado a través de la utilización de la raíz cuadrada. En este contexto, a título de ejemplo, he pedido que me dijesen cual el valor del lado de un cuadrado con 25 centímetros cuadrados de área. André respondió con gran facilidad que son 5 centímetros. Seguidamente he cuestionado, a cada uno de ellos, utilizando ejemplos sencillos, para que respondieran, a través del cálculo mental o mediante el uso de la calculadora, si fuere necesario, y me indicasen el valor del área de un cuadrado a partir del conocimiento del lado y el lado a partir del conocimiento del área.

En el que respecta al paralelogramo, propiamente dicho, he indicado que el área se obtiene multiplicando la base por la altura, destacando que cualesquiera de los dos lados paralelos del paralelogramo podrían ser utilizados como bases, siendo la altura la distancia entre una de las bases y la recta que soporta la otra base.

Para una mejor comprensión del modo de determinar el área de un paralelogramo, he cortado con una tijera uno de los paralelogramos en dos partes, según una dirección perpendicular a las bases, como se muestra en la figura siguiente, de modo que juntando las dos partes, de modo conveniente, se obtiene un rectángulo.

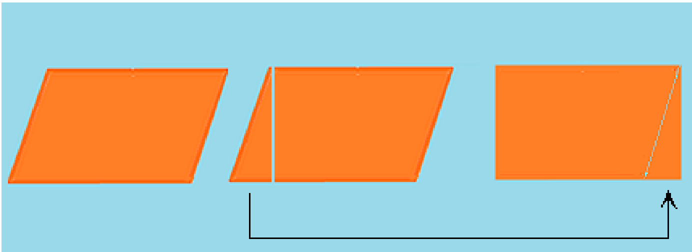


Figura 6.2.8.2-01: Evidenciando cómo obtener el área del paralelogramo

Los alumnos no tuvieron ninguna dificultad en aceptar que la longitud y la anchura del rectángulo son iguales, respectivamente, a la base y a la altura del paralelogramo y, como el rectángulo y el paralelogramo tienen la misma área, entonces el área del paralelogramo se consigue en la forma como les fue indicado: multiplicando la base por la altura.

En el conjunto de cuadriláteros que he proporcionado a cada alumno, el losange fue diseñado para que sus diagonales, mayores y menores, tuviesen iguales medidas, respectivamente, a lo largo y a lo ancho del rectángulo.

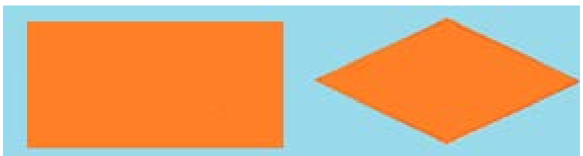


Figura 6.2.8.2-02: Rectángulo y losange.

Así, para proporcionar a los alumnos el método de cálculo del área del losange o rombo, he solicitado que sobrepusiesen el losange al rectángulo y que, al mismo tiempo comprobasen las relaciones que, anteriormente, fueron referidas, y que comparasen, también, sus áreas. André refirió, luego, que el área del losange era la mitad del área del rectángulo, a lo que Daniel manifestó su concordancia. Aproveché, entonces, la ocasión para señalar que

Área del losange = (diagonal mayor × diagonal menor) / 2

También, en el ámbito de la clase de los paralelogramos, he llamado la atención de los alumnos hacia el hecho de que si dos ángulos cualesquier son opuestos entonces son (geométricamente) iguales y son suplementarios si tienen los vértices contiguos.

6.2.8.3 - Los trapecios

He pedido a los alumnos que concentrasen su atención en los cuadriláteros solamente con dos lados paralelos. De la colección inicial todos han seleccionado los tres trapecios que formaban parte de la colección de los cuadriláteros que les ha sido proporcionada. Les hice notar que uno de los trapecios tiene dos ángulos rectos. Todos han estado de acuerdo. Les dije, entonces, que tal trapecio se llama trapecio rectángulo.

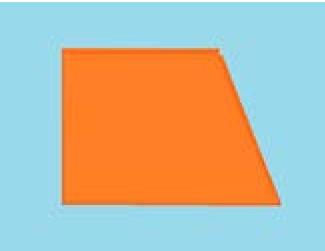


Figura 6.2.8.3-01: Trapecio rectángulo

Después he destacado que, de los dos restantes trapecios, uno de ellos tiene iguales los lados no paralelos, mientras que el otro tiene lados no paralelos diferentes. Todos han analizado con atención los trapecios en cuestión y han concordado con lo que les he referido. Les dije, entonces, que el trapecio que tiene lados no paralelos iguales se llama trapecio isósceles o trapecio simétrico y que en él son iguales dos ángulos que tienen los vértices pertenecientes a la misma base.

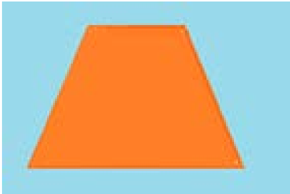


Figura 6.2.8.3-02: Trapecio isósceles

He referido, después, que el otro trapecio, el que tiene distintos los lados no paralelos, tiene la denominación de trapecio escaleno

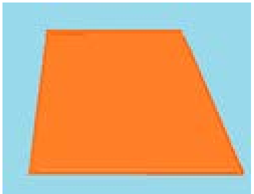


Figura 6.2.8.3-03: Trapecio escaleno

Les mencioné, también, que se denominan por bases del trapecio los lados paralelos y, como éstos tienen longitudes diferentes, uno de ellos es la base más grande y el otro la base más pequeña. He señalado, además, que la distancia entre las bases corresponde a la altura del trapecio y que el área del trapecio se obtiene multiplicando el promedio aritmético de las bases por la altura. Aquí, tuve el cuidado de recordarles en qué consistía un promedio aritmético de dos o más números y he solicitado que, mentalmente, me indicasen cuál era el resultado en ejemplos que les iba mostrando. Después les sugerí que midiesen directamente cada uno de los trapecios que les iba mostrando y que procediesen al cálculo del área correspondiente.

También, en lo que se refiere a los trapecios, les hice notar que en cualquier trapecio, dos ángulos son suplementarios si tienen los vértices contiguos, pertenecientes los vértices a bases diferentes y que en el caso de trapecios isósceles son iguales dos ángulos con los vértices y pertenecen a la misma base del trapecio.

6.2.8.4 - El paralelogramo de Varignon

Se debe al matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) un teorema que afirma que la figura definida por los puntos medios de cualquier cuadrilátero es siempre un paralelogramo cuya área es igual a la mitad del área del cuadrilátero inicial y cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero inicial.

Con el uso de un software de geometría dinámica como, por ejemplo, el Geometer´s SketchPad, es muy simple sensibilizar a los estudiantes normovisuales sobre el contenido del teorema de Varignon, como se ilustra en la figura siguiente:

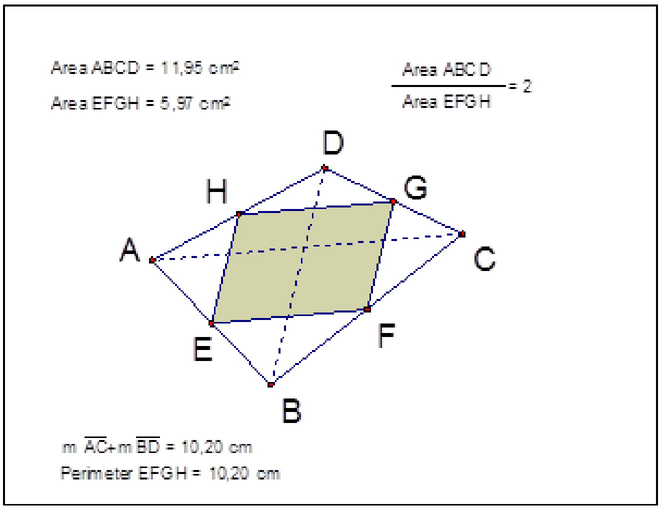


Figura 6.2.8.4-01: Cuadrilátero con el respectivo paralelogramo de Varignon

Como alternativa, para los estudiantes ciegos, en lo que se refiere a la existencia del paralelogramo de Varignon, he presentado un mecanismo consistente por cuatro barras de metal, articuladas entre sí, definiendo un cuadrilátero. A través de una gomilla, uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero, los alumnos pudieron constatar que la gomilla definía un paralelogramo, tal como se puede observar en la figura siguiente.

Figura 6.2.8.4-02: Mecanismo concebido para ilustrar el paralelogramo de Varignon

A los alumnos, por supuesto, me he limitado a comentar, solamente, la existencia del paralelogramo de Varignon. Una justificación teórica de esta existencia se puede presentar en la forma que a continuación se describe.

Siendo A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) y D(x_D, y_D) los vértices de un cuadrilátero [ABCD] se tiene que los puntos medios E, F, G e H de los lados [AB], [BC], [CD] y [DA], respectivamente, tienen por coordenadas, también, respectivamente, $\frac{X_A+X_B}{2}$, $\frac{X_B+X_C}{2}$, $\frac{X_C+X_D}{2}$ e $\frac{X_D+X_A}{2}$. Dado que los segmentos de recta orientados (EF) y (HG), ambos de coordenadas $(\frac{X_C-X_A}{2}, \frac{Y_C-Y_A}{2})$, son equipolentes, así como lo son los segmentos de recta orientados (FG) e (EH), ambos de coordenadas $(\frac{X_D-X_B}{2}, \frac{Y_D-Y_B}{2})$, entonces el cuadrilátero [EFGH] es, obviamente, uno paralelogramo.

6.2.8.5 - Suma de los ángulos internos

Hice notar que una diagonal divide un cuadrilátero en dos triángulos. Para el efecto he proporcionado un cuadrilátero con una diagonal bien destacada (pliegue hecho por doblamiento uniendo dos vértices opuestos) para que pudiesen tener una mejor percepción de lo que les indicaba.

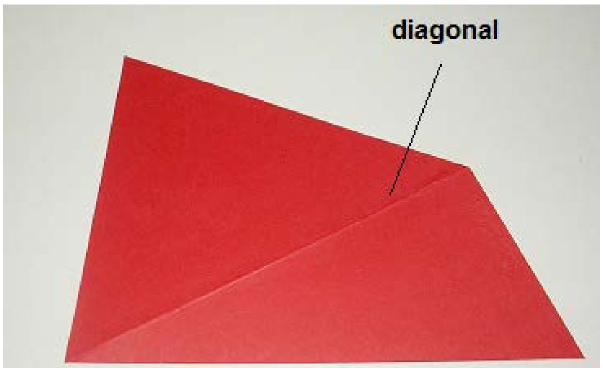


Figura 6.2.8.5-01:Cuadrilátero dividido en dos triángulos por una de las sus diagonales.

He recordado que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados y he preguntado, entonces, cuál era la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero. André y Daniel respondieron casi inmediatamente que era de 360 (grados). Todos acabaron por estar de acuerdo.

Les hice notar que el resultado anterior era obvio para los cuadrados y para los rectángulos cuyos cuatro ángulos internos son ángulos rectos, lo que llevaría a 4×90=360 (grados). He presentado, entonces, los ejercicios siguientes:

- Tres de los ángulos internos de un cuadrilátero miden 80, 107 y 108 grados.¿Cuánto mide el cuarto ángulo?

- En un paralelogramo uno de ángulos internos mide 60 grados. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

- En un trapecio isósceles uno de los ángulos de la base mayor mide 80 grados. ¿Cuánto miden los restantes tres ángulos?

Relativamente al primer ejercicio, André, Bento, Daniel y Francisca, haciendo cálculos simples, llegaron a la solución sin ninguna dificultad mientras Camilo y Edite necesitaron de alguna ayuda.

Les he llamado la atención sobre el hecho de que el problema podría ser interpretado y resuelto a través de una ecuación de primer grado:

$$x+107+80+118 = 360 \Leftrightarrow x+ 305 = 360 \Leftrightarrow x = 360-305 \Leftrightarrow x = 55 \text{ (grados)}$$

Aproveché esta oportunidad para recordarles algunos aspectos relacionados con la resolución de ecuaciones del primero grado.

En cuanto al segundo ejercicio, he solicitado que cada uno de los alumnos manipulase el paralelogramo, propiamente dicho, que integraba la colección de cuadriláteros que les había proporcionado. Les recordé, entonces, que dos ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y si tienen los vértices contiguos entonces son suplementarios. Teniendo en cuenta esta observación André, luego Daniel, y los otros después, llegaron a la conclusión que el ángulo opuesto al ángulo de 60 grados mide, también, 60 grados y los otros dos miden 120 grados, cada uno de ellos.

En relación al tercer ejercicio he solicitado, también, que cada uno de los alumnos manipulase el trapecio isósceles que estaba incluido en la colección de cuadriláteros. Les recordé, después, que son iguales dos cualesquier ángulos interiores cuyos vértices pertenecen a una misma base del trapecio, siendo agudos los relativos a la base mayor y obtusos los relativos a base menor. Ante estas observaciones todos concluyeron que el ángulo de 80 grados, que fue dado, hace relación a uno de los ángulos internos cuyo vértice es uno de los extremos de la base más grande, y que miden también, los restantes ángulos: 80 grados el otro ángulo cuyo vértice es el otro extremo de la base más grande y 110 grados cada uno de los ángulos interiores cuyos vértices son los extremos de la base más pequeña.

6.2.8.6 - Del triángulo al cuadrado

El matemático inglés Henry Ernest Dudeney (1857-1930), que tenía gran afición por el estudio y la investigación en el ámbito de juegos matemáticos, concibió un rompecabezas que demuestra que un triángulo equilátero se puede dividir en cuatro partes (tres cuadriláteros y un triángulo) de tal manera que la conjunción de esas partes, organizada adecuadamente, permite la construcción de un cuadrado, tal como se evidencia en la figura siguiente.

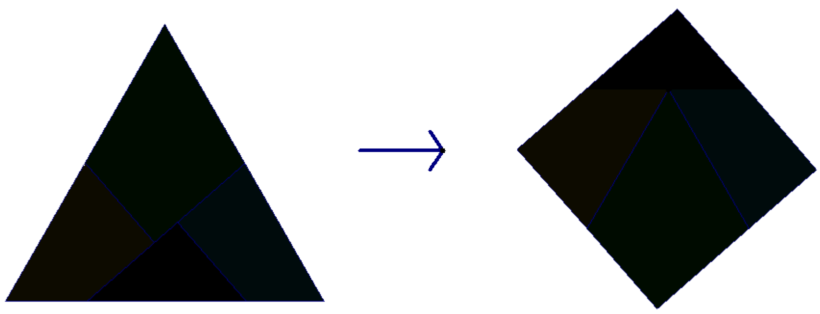


Figura 6.2.8.6-01:Rompecabezas de Dudeney

A los alumnos, uno por uno, les he proporcionado las cuatro piezas del rompecabezas y les he pedido que, en primer lugar, procurasen construir un triángulo equilátero y, luego, un cuadrado. André y Daniel, después de varios intentos, tuvieron éxito en este desafío. Como cada uno de los restantes tuvo dificultad en la construcción del triángulo equilátero que yo solicitaba, y pedí tanto a André, como a Daniel, que auxiliasen a sus compañeros habiendo constatado que Bento y Francisca, tuvieron menos dificultades, mientras que Camilo y Edite con más dificultad, lograron construir el triángulo.

Después de haber asegurado que todos ya sabían montar el rompecabezas con el fin de obtener un triángulo equilátero, he solicitado que investigasen cómo se podría obtener un cuadrado. Aquí, también, André y Daniel, sin ayuda, consiguieron el cuadrado; Bento y Francisca necesitaron analizar el cuadrado previamente construido y, sólo después de un análisis de esta construcción, fueron capaces de deshacer el rompecabezas y reconstruir el cuadrado. De forma similar a lo sucedido con la construcción del triángulo, también, Camilo y Edite fueron los que mostraron más dificultades en la obtención del cuadrado.

Para describir una forma de cómo el rompecabezas puede ser construido téngase en cuenta la figura siguiente :

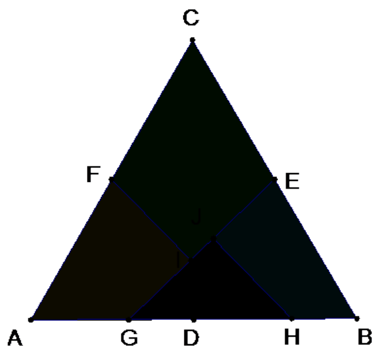


Figura 6.2.8.6-02:Del triángulo equilátero al cuadrado (1)

En lo que respecta a la figura hay a referir el siguiente:

- considerando el triángulo equilátero [ABC] de lado unitario entonces su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}$;

- los puntos D, E y F son los puntos medios de los lados [AB], [BC] y [CA], espectivamente;

- el punto G se sitúa entre los puntos A y D en posición tal que longitud [GE] = $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$, como será demonstrado más por delante;

- el punto H, situado entre los puntos D y B, está a una distancia de G igual a ½, siendo, pues, también, igual a ½ la suma de las longitudes de los segmentos de recta [AG] y [HB];

- el punto I, perteneciente al segmento de recta [GE], está situado en una posición de tal modo que el segmento de recta [FI] es perpendicular al segmento de recta [GE];

- el punto J, perteneciente al segmento de recta [GE], está situado en una posición de tal modo que el segmento de recta [JH] es perpendicular al segmento de recta [GE];

- el área del triángulo [ABC] es igual a la suma de las áreas de los cuadriláteros [AGIF], [HBEJ] e [FIEC] con el área del triángulo [GHJ].

En el sentido de obtener el cuadrado, se utilizan tres transformaciones geométricas:

1ª una rotación de 180 grados del cuadrilátero [AGIF], en torno del punto F,

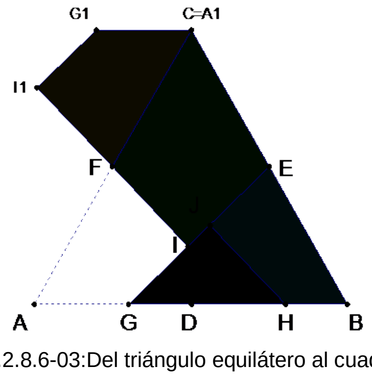


Figura 6.2.8.6-03:Del triángulo equilátero al cuadrado (2)

2º una rotación, también de 180 grados, del cuadrilátero [HBEJ] en torno del punto E,

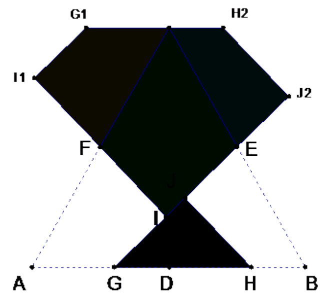


Figura 6.2.8.6-04:Del triángulo equilátero al cuadrado (3)

3º una translación del triángulo [GHJ], siguiendo el vector que transforma G en G1, siendo G1 la imagen de G obtenida en la primera transformación geométrica.

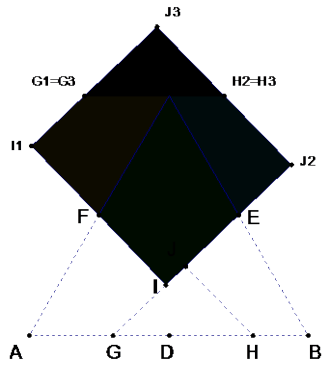


Figura 6.2.8.6-05: Del triángulo equilátero al cuadrado (4)

El cuadrilátero [I J2 J3 I1], por el hecho de tener ángulos rectos en sus ángulos internos, o es un rectángulo o es un cuadrado, dependiendo, naturalmente, de la posición donde, inicialmente, fue colocado el punto G. Para proceder a la determinación de esta posición es conveniente demonstrar, previamente, que longitud [GE] = longitud [I J2]. Para tal efecto téngase en cuenta el triángulo [EFI] que se muestra en la figura siguiente.

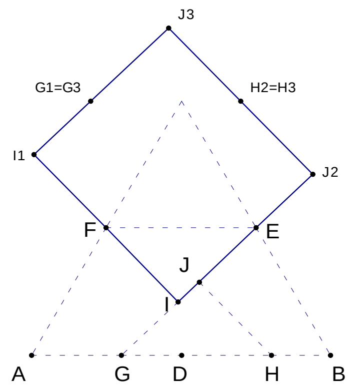


Figura 6.2.8.6-06: Del triángulo equilátero al cuadrado (5)

Los triángulos [GHJ] e [FIE] son geométricamente iguales, dado que ambos son triángulos rectángulos, con la hipotenusa con igual longitud (½), y tienen sus ángulos internos iguales:

- ángulo EGH tiene la misma amplitud que ángulo FEI, pues son ángulos alternos internos en un sistema de dos rectas paralelas (las que contienen os segmentos de recta [FE] y [AB]) intersectadas por una recta secante (la que contiene el segmento [GE]);

- ángulo EFI tiene la misma amplitud de ángulo HGI pues ambos son complementarios de ángulos iguales.

Por la igualdad de los triángulos se tiene longitud [GJ] = longitud [IE], de aquí resultando que longitud [GI] = longitud [JE] y, consecuentemente, por el hecho de tener longitud [JE] = longitud [E J2] entonces longitud [GE] = longitud [I J2].

Atendiendo a que el cuadrilátero [I J2 J3 I1] tiene área igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$, por ser ésta el área del triángulo equilátero inicial, entonces para que él sea un cuadrado debe tenerse longitud [I J2] $=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ por lo que el punto G debe ser colocado en una posición tal que longitud [GE] = $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$.

Para construir un segmento de recta de longitud $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ (el lado del cuadrado) a partir de un segmento de recta de longitud 1 (el lado del triángulo equilátero), puede darse con atención, los siguientes pasos:

1 º la hipotenusa de un triángulo equilátero rectángulo de catetos unitarios es $\sqrt{2}$

2 º la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y $\sqrt{2}$ tiene por longitud $\sqrt{3}$

3º la suma de dos segmentos de recta de longitudes 1 y $\sqrt{3}$ es un segmento de recta de longitud 1+$\sqrt{3}$

4º en cualquier triángulo rectángulo el pie de la altura relativa a la Hipotenusa divide ésta en dos segmentos de recta cuyas medidas a y b verifican la relación $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$, siendo h la medida de la altura relativa a la hipotenusa. Así, dado que $\sqrt[4]{3}$ es un medio proporcional entre 1 y $\sqrt{3}$, una manera de obtener un segmento de recta de longitud $\sqrt[4]{3}$ es construir un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide (1+$\sqrt{3}$), de tal manera que el pie de la altura, con ella relacionada, la divide en dos segmentos rectos, uno de longitud unitaria y otro de longitud $\sqrt{3}$. En estas condiciones la longitud de la altura es, entonces, $\sqrt[4]{3}$

5º finalmente, bisecándose un segmento de recta de longitud $\sqrt[4]{3}$ obtienese otro de longitud $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$.

En la siguiente figura, construida a partir del Geometer´s Sketchpad, se evidencia lo que se acabó de referir.

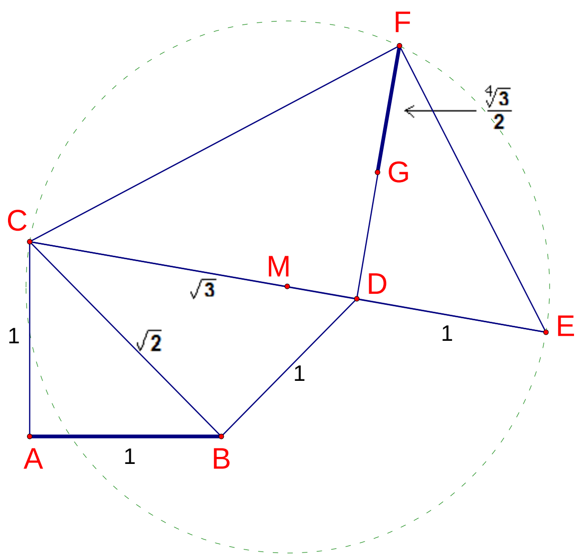


Figura 6.2.8.6-07: Del segmento de recta unitario al segmento de recta de longitud $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$.

6.2.9 - Circunferencia versus Círculo

Llevé para la clase dos objetos con la forma de una circunferencia, uno en alambre y el otro en goma, así como hilo para poder medir el diámetro y el perímetro de cada uno de esos objetos, tal como se muestra en la figura siguiente.

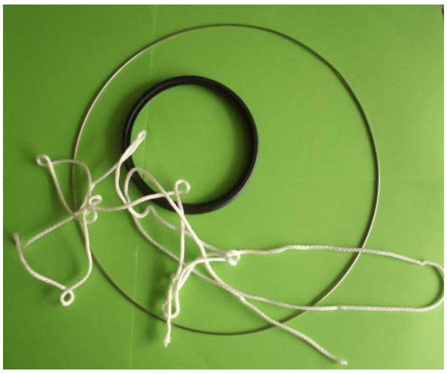


Figura 6.2.9-01: Dos objetos con la forma de una circunferencia y un hilo para medir el diámetro y el perímetro.

En esta ocasión, he solicitado a los alumnos que, utilizando el hilo y la cinta métrica articulada en conjunción con la regla con graduaciones en relieve, determinasen una estimativa del diámetro y el perímetro de cada uno de esos objetos. Los valores que han obtenido, en centímetros, fueron los siguientes: para el objeto de goma, diámetro=12, perímetro=38; y, para el objeto en alambre, diámetro=28 y perímetro=88.

Después, he solicitado que, para cada una de las situaciones, y utilizando la calculadora parlante de Francisca, dividiesen el perímetro por el diámetro. Han constatado que, en el primer caso, se tenía perímetro / diámetro = 38/12 = 3,166... y, en la segunda situación, perímetro / diámetro = 3,142…

He indicado, entonces, que en una circunferencia, es siempre constante la razón entre o perímetro y el diámetro y que esta constante se representa por una letra griega π que se denomina PI, siendo su valor, en términos decimales, proporcionado por una representación decimal infinita no periódica, con el aspecto siguiente: 3,14152653…

Dado que el JAWS[161] interpreta π como siendo p, he convenido que en las clases y en los textos de apoyo esta constante sería designada por PI.

He señalado, también, que cuanto más preciso es el proceso de medición utilizado tanto más cercano de PI estará, naturalmente, el cociente perímetro/diámetro.

He aprovechado, también, esta oportunidad para referirles que los números enteros tienen una representación decimal finita y que los números fraccionarios o la tienen finita, como es, por ejemplo, el caso de 1/2 = 0,5 o la tienen infinita, pero periódica, como se verifica, por ejemplo, para 1/3 = 0,333…

Referí, también, que en su conjunto, los números enteros y los números fraccionarios se denominan números racionales y que el número PI, así como la RaízCuadrada (2), son ejemplos de números que no son racionales y se denominan, por tal hecho, números irracionales.

Hice notar que en la práctica, porque es materialmente imposible trabajarse con una infinidad de posiciones decimales, son utilizados valores aproximados de π con, naturalmente, un número finito de posiciones decimales. Por ejemplo, en la concepción de piezas en la industria metalmecánica, como por ejemplo, tornillos, es muy usual utilizar 4 posiciones decimales, lo que significa, en esta situación, que el valor aproximado de PI es 3,1416. En cuanto a la resolución de problemas geométricos, en el contexto de clase, es muy habitual utilizar sólo dos posiciones decimales. En este caso el valor aproximado es 3,14.

He evidenciado, también que, dado el radio de una circunferencia, para obtener el perímetro se debe multiplicar, primero, el radio por 2 para obtener el diámetro, y multiplicar éste por PI para se obtener el perímetro, de aquí se infiere la siguiente formula:

161 Ver la nota en la página 211 relativamente al binomio Jaws – Editor de texto usual.
.

Perímetro de una circunferencia = 2 × radio × PI
o, de forma simplificada, siendo r el valor del radio,   p = 2 PI r

He recordado la diferencia entre circunferencia y círculo, tal como en la primera clase tuve oportunidad de destacar, he indicado que el área de un círculo se obtiene del modo siguiente:

Área del círculo = PI × radio× radio

o, de forma simplificada, siendo r el valor del radio,   A = PI × cuadrado(r).

Después, fueron practicados algunos ejercicios para consolidación de lo que se acababa de referir.

Destaqué que en la expansión decimal de PI, según el conocimiento que en la actualidad la ciencia nos proporciona, hay una distribución muy equilibrada en el número de veces que se produce cada uno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, así como cada uno de los pares de dígitos (00, 01, 02,..., 97, 98, 99) y los ternos (000, 001, 002...997, 998, 999), o en las secuencias de 4, 5. 6, 7, o hasta, 8 dígitos.

Tuve la oportunidad de mostrar a los alumnos que en el sitio de la INTERNET, cuya dirección es www.atrator.pt/fromPI/, está disponible al público un programa de búsqueda de secuencias de dígitos en la expansión decimal de π. Para tal efecto el usuario introduce una secuencia de, hasta, 8 dígitos, refiriéndose, por ejemplo, a una fecha de nacimiento, tal como 06071999 (06 de julio de 1999) y el programa devuelve la posición en que tal secuencia está en la expansión decimal de PI, como se muestra en la figura siguiente.

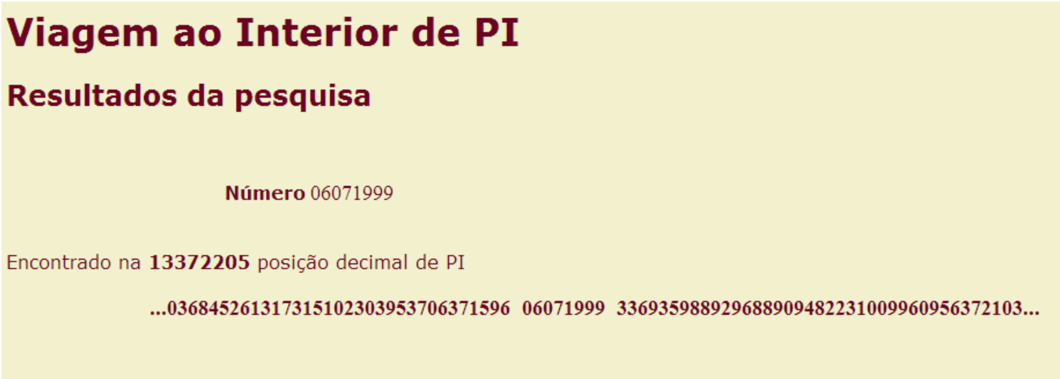


Figura 6.2.9-02: Viaje al interior de PI

Todos los alumnos se quedaron muy perplejos con esta situación y cada uno de ellos quiso saber, naturalmente, en qué posición de la expansión decimal de π iniciaba la secuencia de 8 dígitos relativa a la fecha de su nacimiento y a las relativas a algunos familiares.

Como curiosidad, les dije a ellos que uno de los principales problemas de la Antigua Grecia consistió en hacer la cuadratura del círculo, esto es encontrar un cuadrado cuya área es igual al área de un círculo, utilizándose para este propósito, solamente, compás y regla sin ninguna marca. Este problema ha sido un rompecabezas para muchos matemáticos a lo largo de la historia hasta que, en 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann demostró que esto problema es de resolución imposible.

Señalé, también, que en contraste con lo que fue indicado en el párrafo anterior, la cuadratura del triángulo equilátero es un problema perfectamente soluble tal como se ha constatado por el rompecabezas de Dudeney, descrito en la última subsección.

También, como otra curiosidad, he expuesto que, en la Antigua Grecia, la letra que se lee como PI era utilizada en el sistema de numeración y equivalía a 80 y que fue el matemático galés William Jones quien lo adoptó en, 1706, por primera vez, para traducir la relación entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia.

6.2.10 - Momentos de evaluación

En determinados momentos, para la evaluación de conocimientos y, como ya he señalado en el capítulo introductorio, con la preocupación de evitar pruebas formales, que podrían causar alguna molestia a los estudiantes, en este caso, durante las clases y de forma estratégica, sin que los alumnos diesen cuenta que estaban siendo evaluados, fui colocando cuestiones que todos procuraran responder, individualmente, y teniendo, por mi parte, la permanente preocupación, caso que verificase que, solo por si, un alumno no estaba a conseguía responder a una pregunta dada, yo intervendría en su ayuda para que, así, todos las cuestiones tuviesen, siempre, respuesta correcta. Con este fin, tal como, también, referí en el capítulo introductorio, las respuestas fueron clasificadas según el siguiente criterio:

3 - el alumno resolvió el problema sin la intervención del profesor;
2 - el alumno resolvió el problema con una pequeña ayuda del profesor;
1 - el alumno resolvió el problema con gran ayuda del profesor.

A continuación se describen las cuestiones utilizadas en la evaluación, así como uno cuadro donde se muestra la calificación de las respuestas proporcionados por los alumnos.

6.2.10.1 - Conjunto de cuestiones

Las cuestiones, para resolución individual, fueron las que siguen.

I. Utilizando un hilo de alambre, que constituye la representación de una recta, con tres etiquetas, a él adjuntas, y que representan tres puntos distintos P, Q e R de la recta

I.1 Identificar la semirrecta de origen en P y pasando por Q.
I.2 Identificar la semirrecta de origen en Q y pasando por P.
I.3 Identificar el segmento de recta [P, Q].
I.4 Identificar el segmento de recta [Q, R].

II. Posicionar las manos de modo a que, con ellas, sean representadas situaciones relativas a

II.1 dos planos paralelos;

II.2 dos planos perpendiculares;

II.3 dos planos ni paralelos ni perpendiculares.

III. Utilizando la tapa de la mesa de trabajo, como representación de un plano PI, un lápiz sobre la tapa de la mesa, como representación de una recta r, y la punta do dedo indicador, posicionada ligeramente encima de la tabla de la mesa, como representación de un punto A

III.1 con una hoja de cartulina representar el plano definido por la recta r y por el punto A.

III.2 Indicar cuál es la posición que debe tener el lápiz de modo que la recta r, pase por el punto A y sea perpendicular al plano representado por la tapa de la mesa.

III.3 indicar cuál es la posición del lápiz de modo que su punta pueda ser la representación de la proyección ortogonal del punto A en el plano PI.

IV Utilizar las manecillas del reloj didáctico, para representar un ángulo

IV.1 agudo;

IV.2 recto;

IV.3 obtuso;

IV.4 llano;

IV.5 completo;

IV.6 convexo;

IV.7 cóncavo.

V Utilizando una placa de corcho, alfileres y gomillas, y el transportador con graduaciones en relieve, diseñar un ángulo

V.1 de 30 grados;

V.2 de 120 grados.

VI Determinar la amplitud de un ángulo que sea

VI.1 complementario de otro que mide 40 grados;

VI.2 suplementario de otro que mide 120 grados.

VII Verificar si pueden tener igual amplitud dos ángulos que sean

VII.1 complementarios;

VII.2 suplementarios.

VIII En un triángulo dos ángulos miden 40 y 80 grados

VIII.1 ¿cuánto mide el tercer ángulo?

VIII.2 ¿cómo se clasifica el triángulo en cuanto a los ángulos?

IX En un triángulo dos ángulos miden 40 y 50 grados

IX.1 ¿cuánto mide el tercer ángulo?

IX.2 ¿cómo se clasifica el triángulo en cuanto a los ángulos?

X En un triángulo dos ángulos miden 30 y 50 grados

X.1 ¿cuánto mide el tercer ángulo?

X.2 ¿cómo se clasifica el triángulo cuanto a los ángulos?

XI ¿Cómo clasificar, en cuanto a los lados, un triángulo cuyos ángulos internos miden, en grados

XI.1 40, 40 e 100?

XI.2 60, 60 e 60?

XI.3 40, 60 e k? (donde k representa un número entero)

XII Determinar el área de un triángulo cuyos lados miden 8, 15 e 17 centímetros.

XIII En un triángulo rectángulo los catetos miden 8 y 15 centímetros. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

XIV En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 centímetros y uno de los catetos mide 12 centímetros. ¿Cuál es la longitud del otro cateto?

XV ¿Cómo clasificar en cuanto a los ángulos un triángulo cuyos lados miden

XV.1 12, 15 e 20 centímetros?

XV.2 4, 4 e 5 centímetros?

XV.3 2, 2, e 3 centímetros?

XVI Tres ángulos internos de un cuadrilátero miden 40, 60 y 120 grados. ¿Cuánto mide el otro ángulo interno del cuadrilátero?

XVII Sabiendo que el área de un rectángulo es 48 centímetros cuadrados y que la longitud mide 12 centímetros, calcular el perímetro.

XVIII Una circunferencia está inscrita en un cuadrado de 10 centímetros de lado. Calcular el perímetro de la circunferencia.

6.2.10.2 - Clasificación de las respuestas

Pregunta	Alumnos					
	André	Bento	Camilo	Daniel	Edite	Francisca
I.1	3	3	2	3	2	3
I.2	3	3	2	3	2	3
I.3	3	3	2	3	2	3
I.4	3	3	3	3	2	3
II.1	3	3	3	3	3	3
II.2	3	3	3	3	3	3
II.3	3	3	3	3	2	3
III.1	3	3	2	3	2	2
III.2	3	3	2	3	2	2
III.3	3	3	2	3	2	2
IV.1	3	3	3	3	3	3
IV.2	3	3	3	3	3	3
IV.3	3	3	2	3	2	3
IV.4	3	3	2	3	2	3
IV.5	3	3	2	3	2	3
IV.6	3	3	2	3	2	2
IV.7	3	3	2	3	2	2
V.1	3	3	2	3	2	2
V.2	3	3	2	3	2	3
VI.1	3	3	2	3	2	3
VI.2	3	3	2	3	2	3
VII.1	3	2	1	3	1	2
VII.2	3	2	1	3	1	2

Pregunta	Alumnos					
	André	Bento	Camilo	Daniel	Edite	Francisca
VIII.1	3	2	1	3	1	2
VIII.2	2	2	1	3	1	2
IX.1	3	3	2	3	2	2
IX.2	3	3	2	3	2	3
X.1	3	3	2	3	2	3
X.2						
XI.1	3	3	2	3	2	3
XI.2	3	3	2	3	2	3
XI.3	3	2	1	3	1	2
XII	2	2	1	2	1	2
XIII	3	2	1	3	1	2
XIV	3	2	1	3	1	2
XV.1	2	2	1	2	1	2
XV.2	3	3	2	3	2	3
XV.3	3	3	2	3	2	3
XVI	3	3	2	3	2	2
XVII	3	2	1	3	1	2
XVIII	3	2	1	2	1	2

En el cuadro siguiente se indica por alumno, y para las 40 cuestiones efectuadas, el número de respuestas clasificadas en cada uno de los niveles 1, 2 y 3.

Alumno	Número de respuestas de		
	nivel 3	nivel 2	nivel 1
André	37	3	0
Bento	29	11	0
Camilo	6	23	11
Daniel	37	3	0
Edite	4	25	11
Francisca	21	19	0

Los resultados evidencian que André y Daniel respondieron correctamente y de forma autónoma a la gran mayoría (92,5%) de las cuestiones; que Bento respondió de forma autónoma al 72,5% de las cuestiones y que, con una pequeña ayuda respondió acertadamente a las restantes 27,5%; que Francisca respondió autónomamente al 52,5% de las preguntas y a 47,5% con una pequeña ayuda; que Camilo sólo respondió, de forma acertada y autónomamente, al 15% de las preguntas, con una pequeña ayuda al 57,5% y al 27,5% con una gran ayuda y que Edite solamente respondió autónomamente al 10% de las cuestiones, con una pequeña ayuda respondió al 62,5% de las preguntas y necesitó de una gran ayuda para responder al 27,5% de las cuestiones.

6.2.11 - Sólidos geométricos

A los alumnos fue proporcionada la información de que es usual designar por sólido a cualquier objeto del mundo que nos rodea, ocupando un determinado lugar en el espacio, con formas bien definidas que se mantienen inmutables mientras que sobre él no sea ejercida ninguna fuerza.

Referí, también, que la Geometría interpreta los sólidos como conjuntos tridimensionales de puntos cuyas posiciones relativas se mantienen inalterables entre si y, en este contexto, los sólidos son denominados como sólidos geométricos. He resaltado que cuando los sólidos geométricos limitan solamente, superficies planas, se denominan poliedros y tienen la designación de no poliedros cuando es curva, por lo menos, una le las superficies que los delimita.

El proceso de enseñanza/aprendizaje de los sólidos geométricos incidió sobre algunos sólidos poliedros, bien de la familia de los prismas (el cubo, el prisma triangular regular recto, prisma cuadrangular regular recto y el paralelepípedo rectangular) bien de la familia de las pirámides (pirámide triangular regular recta y la pirámide cuadrangular regular recta) y sobre tres sólidos no poliedros: el cilindro recto, el cono recto y la esfera. A este efecto he utilizado el conjunto de sólidos, ya mencionado en la sección *3.3.5 – Tiflotecnologias para la Enseñanza de la Matemática*, así como objetos que forman parte de lo cotidiano como una esfera, embalajes de medicamentos, unas representando prismas cuadrangulares (regulares rectos) y otras paralelepípedos (rectos), una caja de zapatos, una caja de fósforos, y una caja de palillos.

6.2.11.1 - El cubo

La figura siguiente se refiere a un cubo cuyas caras son en acrílico transparente y que, dentro, contiene material plastificado que, una vez retirado, permite estudiar la planificación del cubo.

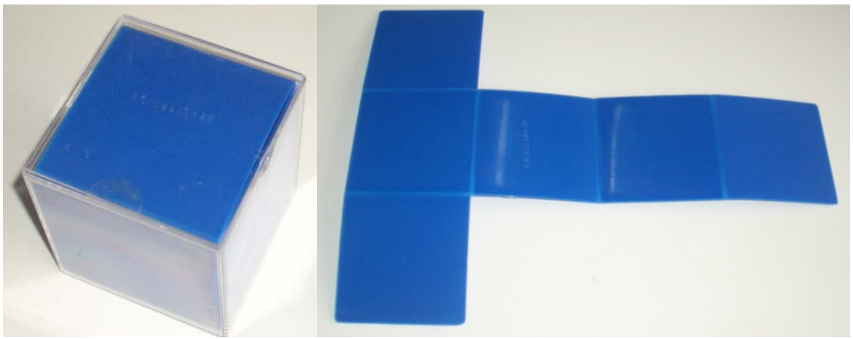


Figura 6.2.11.1-01: Cubo en acrílico conteniendo material plastificado para estudio de su planificación.

Los alumnos tuvieron la oportunidad de ver que las caras del cubo son seis, son paralelas dos a dos y tienen la forma geométrica de cuadrados. Se pidió su atención hacia el hecho de que dos caras adyacentes tienen en común un segmento de recta que se llama arista. En esta ocasión se les preguntó cuál es el número de aristas que presentaba. Todos han reconocido, algunos de inmediato, otros después de una segunda enumeración, que el número de aristas era 12.

Se mostró que las aristas contiguas tienen en común un punto llamado vértice y que en cada vértice del cubo confluyen precisamente tres aristas y, también que el cubo presenta ocho vértices.

He recalcado que pueden ser seleccionados dos cualesquier caras de un cubo, que sean opuestas, como bases del cubo, siendo las otras caras llamadas de caras laterales. Sin embargo, cuando un cubo está apoyado en una superficie es muy habitual designar por bases del cubo, bien la cara de contacto con la superficie, bien la cara que si opone a ella, designando, naturalmente, por caras laterales las restantes cuatro.

Utilizando el cubo referido en la figura anterior, he evidenciado la respectiva planificación. He solicitado, después, que midiesen la arista y calculasen las áreas de la base, lateral y total.

En el cálculo del área de la base pregunté *¿cuánto es ocho al cuadrado?* De inmediato Francisca respondió *¡es 16!* Llamé, entonces, la atención, ocho al cuadrado no es ocho veces dos pero sí ocho veces ocho. *¡Ah, entonces es 64!* dijo Bento.

Para el cálculo del área lateral, y teniendo presente la planificación del cubo, los alumnos tuvieron oportunidad de verificar que se podría obtener multiplicando por cuatro el área de una de las caras o multiplicando el perímetro de la base por una arista lateral.

Relativamente al área total, fue mostrado que podrían sumar el área lateral con las áreas de las bases y luego multiplicar por seis el área de una de las caras. Después de los cálculos de las áreas se señaló que el cálculo del volumen se hace a través de la expresión

$$\text{volumen} = \text{arista} \times \text{arista} \times \text{arista} \quad \text{(arista al cubo).}$$

He aprovechado la oportunidad para destacar que la operación que permite calcular la arista de un cubo, una vez conocido su volumen, es la raíz cúbica. A la semejanza de lo que se hizo para el cuadrado, he solicitado el cálculo de volúmenes a partir del conocimiento de la arista, utilizando valores simples para motivar el cálculo mental, realizando el cálculo con ayuda de una calculadora parlante si tenían necesidad para tal.

Como yo dispusiese de un otro cubo, más pequeño que el anterior, sugerí que midiesen la arista de ese cubo y que determinasen el área de cada cara, el área lateral, el área total y el volumen. Con base en los cálculos inherentes a los dos cubos he indicado a los alumnos que era interesante la creación de una tabla para se pudieran relacionar los valores determinados.

Arista (en centímetros)	Área de cada cara (en centímetros cuadrados)	Área lateral (en centímetros cuadrados)	Área total (en centímetros cuadrados)	Volumen (en centímetros cúbicos)
4	16	64	96	64
8	64	256	384	512

Con los valores indicados en la tabla he procurado llevar a los alumnos a la conclusión de que cuando la arista duplica, el área de cada cara, el área lateral y el área total cuadruplican y el volumen octuplica. Como Camilo y Edite tenían algunas dificultades en llegar a estas conclusiones tuve la necesidad de, utilizar material Cuisenaire, que contempla, como piezas más simples, cubos de 1 centímetro de arista. Para uno de estos cubos he solicitado que procediesen al cálculo del área de la base, del área lateral, del área total y del volumen.

Después, he solicitado a cada uno de ellos (Camilo y a Edite) que, utilizando 8 de las piezas más simples, construyesen un nuevo cubo, tal como lo ilustra la figura siguiente.

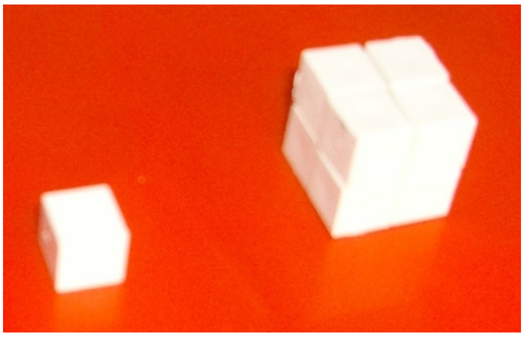


Figura 6.2.11.1-02: Dos cubos, uno con un centímetro de arista y el otro con aristas con 2 centímetros.

Para este nuevo cubo les he pedido que procediesen al cálculo de las diferentes áreas y del volumen. Basado en los resultados obtenidos, que constan en la tabla siguiente, los alumnos acabaron por concluir que, cuando se duplica la arista, las áreas, bien de cada cara, fuera lateral, bien, también, total, se ha cuadriplicado y el volumen ha aumentado 8 veces.

Arista (en centímetros)	Área de cada cara (en centímetros cuadrados)	Área lateral (en centímetros cuadrados)	Área total (en centímetros cuadrados)	Volumen (en centímetros cúbicos)
1	1	4	6	1
2	4	16	24	8

6.2.11.2 - El prisma cuadrangular (regular recto)

Los alumnos tuvieron la oportunidad de verificar que, como el cubo, también, el prisma cuadrangular (recto regular) tiene seis caras, paralelas, dos a dos, doce aristas y ocho vértices. Dos de las caras son cuadrados, consideradas las bases, y las cuatro restantes, llamados caras laterales, tienen la forma de rectángulos geométricamente iguales entre sí. La distancia entre las bases, que es precisamente la longitud de la arista lateral, es definida como altura del prisma.

Se indica que este tipo de sólidos es muy usual observarlo en embalajes de medicamentos que contienen dispositivos de forma cilíndrica, como por ejemplo, una pipeta o un frasco tipo cuentagotas. La figura siguiente evidencia la muestra de embalajes que los alumnos tuvieron la oportunidad de manipular.

Figura 6.2.11.2-01: Embalajes de medicamentos, constituyendo la representación de prismas cuadrangulares (rectos)

Con base en una representación del prisma cuadrangular, en acrílico transparente, cuyo interior contenía material plastificado que permite el estudio de planificación de este sólido, fue evidenciado a los alumnos cómo calcular el área de la base, el área lateral y el área total, así como el volumen.

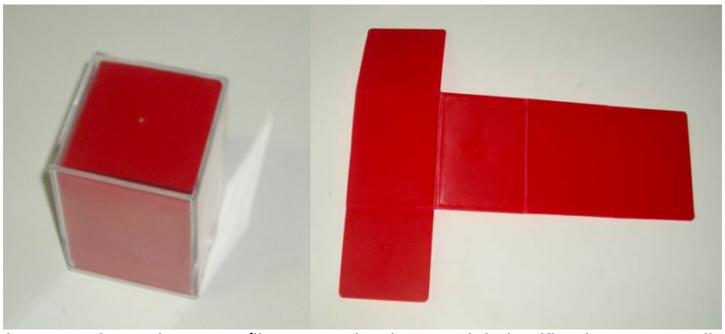


Figura 6.2.11.2-02: Prisma cuadrangular en acrílico conteniendo material plastificado para estudio de su planificación.

En lo que respecta al cálculo del área lateral los alumnos tuvieron la oportunidad de comprobar que su valor es el cuádruple del área de una cara lateral, pudiendo, también, atendiendo a lo que han observado en la planificación de este sólido, y que tal valor podría ser obtenido multiplicando el perímetro de la base por la altura, siendo esta, por supuesto, cualquier arista no integrada en ninguna de las bases.

Como ejercicios prácticos fue sugerido que los alumnos midiesen la arista de la base y la arista lateral de cada uno de los prismas, puestos a su disposición, y que a partir de esos valores, fueran requeridos a calcular el área de cada cara, el área lateral, el área total y el volumen.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes

Arista (en centímetros)		Área (en centímetros cuadrados)			Volumen (en centímetros cúbicos)
de la base	lateral	de la base	lateral	total	---
6	8	36	192	228	288
2,5	12	6,25	120	126,25	75
3	8	9	96	105	72

A semejanza de lo ocurrido en el estudio del cubo, André y Daniel no han tenido dificultad alguna, Bento y Francisca con pocas dificultades, mientras que Camilo y Edite han necesitado de un mayor apoyo de mi parte.

6.2.11.3 - El paralelepípedo (rectangular)

También, a semejanza del cubo y del prisma cuadrangular (regular, recto), los alumnos pudieron verificar que el paralelepípedo (rectangular), también tiene seis caras, paralelas dos a dos, siendo todas rectángulos, tiene doce aristas y ocho vértices. Se les mostró que cualesquier dos caras,   que se oponen entre sí, podrían ser consideradas como bases, siendo las restantes cuatro caras consideradas como caras laterales.

Realcé que representaciones de paralelepípedos ocurren en múltiples situaciones de la vida real como, por ejemplo, entre muchos otros, en cajas de zapatos, cajas de fósforos, acuarios, cajas de detergente, ladrillos, así como en muchos embalajes de medicamentos y, también, en un porcentaje significativo bien de salas de clase de las instituciones educativas bien de las habitaciones de las viviendas.

Para el estudio del paralelepípedo (rectángulo) fueran utilizados embalajes de medicamentos y de forma similar a lo que se hizo para el cubo y para el prisma cuadrangular, también ha sido estudiado la respectiva planificación, como se muestra a través de la siguiente figura.

Figura 6.2.11.3-01: Representación de un paralelepípedo (rectangular) y estudio de la respectiva planificación.

Los alumnos tuvieron la oportunidad de medir las aristas de los dos paralelepípedos colocados a su disposición y proceder, para cada uno de ellos, al cálculo del perímetro de la base y de las áreas de base, lateral y total y, también, del volumen.

Aristas (en centímetros)			Perímetro (en centímetros)	Áreas (en centímetros cuadrados)			Volumen (en centímetros cúbicos)
de la base		lateral	de la base	de la base	lateral	total	
6	7,5	10	27	45	270	315	450
2,5	5,5	7	16	13,75	112	125,75	220

6.2.11.4 - El prisma triangular (regular recto)

En la colección de sólidos geométricos había un prisma triangular (regular recto) tal como lo ilustra la siguiente figura.

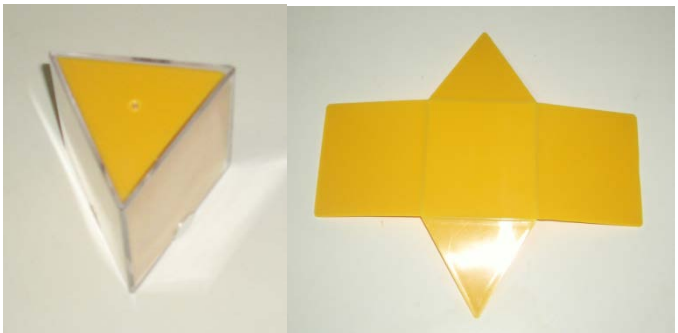


Figura 6.2.11.4-01: Prisma triangular en acrílico conteniendo material plastificado para estudio da su planificación.

Los alumnos tuvieron la oportunidad de verificar que este sólido geométrico contempla cinco caras, siendo dos de ellas paralelas entre sí, constituyendo las bases del prisma, con la forma geométrica de triángulos equiláteros, y que las caras laterales son tres rectángulos congruentes. Han verificado, también, que este sólido contempla seis vértices y nueve aristas.

Les referí, también, que es muy usual que las cajas de palillos presenten la forma de prismas triangulares.

He solicitado a los alumnos que en el prisma de acrílico colocado a su disposición, usando la regla con graduación en relieve, efectuasen las mediciones bien de las aristas de la base bien de las aristas laterales, concluyendo que todas median 8 centímetros.

He pedido a continuación que me indicasen cuál era el valor del perímetro de la base. André, de pronto, ha indicado *¡son 3 veces 8 es decir 24!* Daniel ratificó, afirmando: *son 3 aristas de la base, cada una mide 8 centímetros, luego el perímetro (de la base) es 24 centímetros*.

Después, he pedido a Francisca que me indicase el valor del área de una cara lateral. Como dudase, señalé que cada cara lateral, en general, en un prisma (regular, recto), tiene la forma de uno rectángulo, pero, en este sólido en particular, es uno cuadrado dado que las aristas miden todas 8 centímetros. Y, en expectativa de su respuesta, he insistido, *el área de uno cuadrado de lado 8 (centímetros) es … ¡64!* ha dicho ella.

De nuevo yo he insistido con Francisca, *y la suma de las áreas de las 3 caras laterales ¿cuánto es*? Utilizando la calculadora parlante me indicó que era de 192 (centímetros cuadrados).

Entonces, todos han estado de acuerdo en que el área lateral era de 192 centímetros. Llamé, también, el atención de que la planificación del prisma evidenciaba, en lo que respecta a las caras laterales, un rectángulo de largura igual al perímetro de la base y de anchura el valor de la arista lateral, por lo que multiplicando el perímetro de la base (24 centímetros) por la arista lateral (8 centímetros) se obtiene los 192 centímetros cuadrados.

Considerando la determinación del área de la(s) base(s) he presentado un triángulo equilátero, con 8 centímetros de lado, así como dos triángulos rectángulos, ambos con hipotenusa de 8 centímetros y uno de los catetos de 4 centímetros resultantes de la división de un otro triángulo equilátero, de lados que mide, también, 8 centímetros, a través de una de sus alturas.

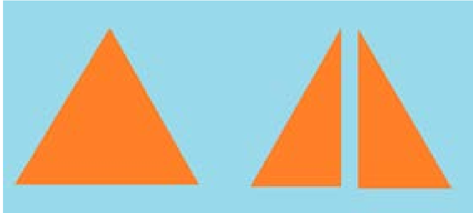


Figura 6.2.11.4-02: Triángulo equilátero y dos triángulos rectángulos resultantes de la división de otro triángulo equilátero a través de una de sus alturas.

Los alumnos tuvieron oportunidad de constatar que la altura del triángulo equilátero es, precisamente, uno de los catetos de cada uno de los triángulos rectángulos cuya medida, no fue determinada. Han constatado, también, que tal valor (en centímetros) se puede obtener a través de la aplicación del Teorema de Pitágoras y, en este ámbito, referí una vez más:

- *para calcular la hipotenusa, dados los catetos, se suman los cuadrados de los catetos y, después, se extrae la raíz cuadrada de esta suma*;

- *para calcular uno cateto, dada la hipotenusa y el otro cateto, al cuadrado de la hipotenusa se substrae el cuadrado del otro cateto y, después, se extrae la raíz cuadrada de esta diferencia*.

En esta ocasión, y teniendo en cuenta la determinación de uno de los catetos sabiendo que, en centímetros, la hipotenusa mide 8 y el otro cateto mide 4, André ha indicado: *¡se calcula la diferencia entre el cuadrado de ocho con el cuadrado de cuatro y después se determina la RaízCuadrada…!*

Así, los alumnos obtuvieron
Cuadrado (h) = Cuadrado (8) – Cuadrado (4) = 64 -16 = 48
y, por consiguiente, h = RaízCuadrada (48).

En consecuencia, he solicitado que, utilizando la calculadora parlante, tuviesen una noción de un valor cercano para la altura. Francisca, de inmediato, ha referido que *la RaízCuadrada de 48) ¡es 6,928203…!*

He señalado, entonces, que la RaízCuadrada (48) tiene una representación decimal infinita, no periódica, por lo que se estaba en presencia de un número irracional.

He aprovechado, también, la oportunidad para evidenciar que siendo 48= 4×12 y que siendo 4 un cuadrado perfecto, esto es, teniendo una RaízCuadrada que es un número natural, entonces la RaízCuadrada (48) podría ser simplificada del modo siguiente:

RaízCuadrada(48) = RaízCuadrada (4×12) =
= RaízCuadrada(4) × RaízCuadrada (12) = 2 × RaízCuadrada(12).

He realizado, también, en el ámbito de la expresión 2 × RaízCuadrada(12), que el número 12 se denomina radicando mientras el 2 se designa por coeficiente e hice referencia a algunas propiedades operatorias de los radicales, a través de algunos ejemplos que describo:

Ejemplo 1: RaízCuadrada (12) + RaízCuadrada (12)= 2×RaízCuadrada (12)
Ejemplo 2: 8×2×RaízCuadrada (12) =16×RaízCuadrada (12)
Ejemplo 3: 16×RaízCuadrada (12) / 2 = 8×RaízCuadrada (12)
Ejemplo 4: RaízCuadrada(4) × RaízCuadrada(9) = RaízCuadrada (36)

Con respecto al último ejemplo he realzado que tenía sentido dado que
RaízCuadrada (4)=2, RaízCuadrada (9)=3, RaízCuadrada(36)=6 y 2 × 3 = 6;

pero no sería legítimo, por ejemplo, considerar
RaízCuadrada (4)+ RaízCuadrada(9)= RaízCuadrada(4+9)
pues, mientras RaízCuadrada(4)+ RaízCuadrada(9) = 2 + 3 = 5,
la RaízCuadrada (4+9) = RaízCuadrada(13) hace relación a un número comprendido entre 3 y 4.

Para que los alumnos pudiesen comprender, con más claridad, la afirmación anterior, he señalado, en diálogo con ellos, que

- cuanto mayor es el número entero, tanto mayor será su raíz cuadrada;
- el 13 no es un cuadrado perfecto, pues no hay ninguno entero que elevado al cuadrado dé 13;

- el mayor cuadrado perfecto menor que 13 es 9=Cuadrado (3);
- el menor cuadrado perfecto mayor que 13 es 16 = Cuadrado (4);
- luego, RaízCuadrada (13) es un número comprendido entre 3 y 4.

En esta ocasión, he pedido a Francisca que utilizase la calculadora parlante para sacar cuál era la representación decimal de RaízCuadrada (13). Se oyó, entonces, *¡es 3,605551… !*

Para la base del prisma triangular regular, que algunos ya han constatado ser un triángulo equilátero de 8 centímetros de lado, lo que proporciona para la altura el valor, en centímetros, dado por RaízCuadrada (48), referí que, en rigor el área, en centímetros cuadrados, sería dada por

Área de la base = (8 × RaízCuadrada (48)) / 2 = 4 RaízCuadrada (48).

Les he indicado que es muy usual, cuando los resultados finales no se puedan expresar en representaciones decimales finitas, ser presentados con aproximaciones a 2 posiciones decimales, debiendo, para este efecto[162], utilizar los resultados intermedios con aproximaciones, por lo menos, de 4 posiciones decimales y, siempre que sea adecuado, utilizar en los cálculos todas las posiciones decimales que la calculadora puede proporcionar, al posibilitar el uso de teclas facilitadoras, por ejemplo, del cálculo de la RaízCuadrada y/o de la utilización de PI.

Así, los alumnos, utilizando la calculadora parlante, obtuvieron, en centímetros cuadrados[163].

Área de la base = 27,71281… ±= 27,21 (2 cd) [164]

Después, para el área total, han dicho (con un poquito de mí apoyo, naturalmente) que tenían que sumar el área lateral con dos veces el área de la base, por lo que, en centímetros cuadrados, obtuvieron, en centímetros cuadrados

Área Total = 192 + 2 × 4 RaízCuadrada (48)

---

[162] Teniendo en cuenta las enseñanzas inherentes a los sistemas de numeración de coma flotante que se estudian en Análisis Numérico.
[163] Ver los dos párrafos siguientes a la figura 6.1-01: Disposición de los alumnos ydel profesor por la mesa de trabajo.
[164] Los alumnos fueron alertados que cd dice respecto a casa(s) decimal (es).

lo que, a través de la utilización de la calculadora, proporcionó el valor aproximado, a dos posiciones decimales: 247,43

Para el volumen han dicho que se debería multiplicar el área de la base (4×RaízCuadrada (48)) por la altura (8), lo que a través de la calculadora ha dado el valor aproximado, en centímetros cúbicos, 221,70.

6.2.11.5 - La pirámide cuadrangular (regular recta)

Los alumnos tuvieron la oportunidad de verificar que las pirámides son poliedros con una sola base y que las caras laterales son triángulos que tienen entre sí, un vértice común (generalmente señalado como el vértice de la pirámide), mientras que los prismas (rectos) se caracterizan por tener dos bases y las caras laterales rectángulos.

En el caso de la pirámide cuadrangular (regular recta), a la cual se refiere la figura siguiente, los alumnos constataron que la base es un cuadrado, las cuatro caras laterales son triángulos isósceles, el número de vértices es cinco (cuatro en la base y uno común a las caras laterales), el número de aristas es ocho (cuatro en la base y cuatro laterales) y, también, que el vértice común de las caras laterales es tal que su proyección ortogonal en la base coincide con el centro geométrico de ésta.

He señalado, también, que las pirámides de Egipto, algunas tiendas de campaña y algunos techos de cuatro aguas, son representaciones de pirámides cuadrangulares.

Figura 6.2.11.5-01: Pirámide cuadrangular en acrílico conteniendo material plastificado para estudio de su planificación.

Utilizando la regla con graduaciones en relieve, los alumnos han verificado que las aristas de la base median 8 centímetros y que las aristas laterales median 9,5 centímetros. Para el perímetro de la base obtuvieron, naturalmente, el valor 32 (centímetros) y para el área de la base el valor 64 (centímetros cuadrados).

Considerando la determinación del área lateral, he solicitado a cada alumno que sostuviese la pirámide cuadrangular de tal modo que el dedo indicador de una de sus manos quedase apoyado en el vértice de la pirámide, el pulgar correspondiente soportara la pirámide en el centro geométrico de la base, mientras el índice de la otra mano se apoyaba en el punto medio de una de las aristas de la base, como se muestra en la figura siguiente.

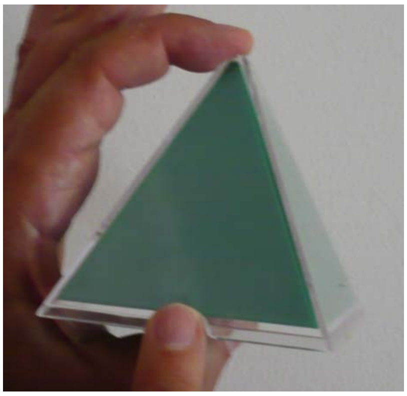


Figura 6.2.11.5-02: Relación entre la apotema de la pirámide, la arista lateral y la arista de la base.

Llamé, en seguida, su atención sobre el hecho de que la arista de la base constituye la base del triángulo siendo el segmento de recta de los extremos donde los dedos índices están apoyados en el correspondiente a la altura y que, en el ámbito de la pirámide, ese segmento de recta tiene la denominación de la apotema de la pirámide. De este modo, los alumnos han constatado que el área de esa cara lateral es proporcional al semiproducto de la apotema de la pirámide por la arista de la base.

Le hice notar que la cara lateral tiene la forma de un triángulo isósceles y que, a semejanza de lo que fue visto en la subsección anterior, la apotema de la pirámide divide la cara lateral en dos triángulos rectángulos de tal modo que la apotema de la pirámide es uno de los catetos (de cada uno de esos triángulos rectángulos) y el otro cateto coincide con la mitad de la arista de la base, constituyendo la arista lateral de la pirámide la hipotenusa, por lo que, teniendo presente el Teorema de Pitágoras,

Cuadrado (apotema de la pirámide) = Cuadrado (9,5) – Cuadrado (4) =
90,25 – 16 = 74,25 y, consecuentemente, en centímetros,

Apotema de la pirámide = RaízCuadrada (74,25) = 8,61684… ±= 8,62 (2 cd).

Entonces, para el área de la cara lateral, han constatado que el valor, en centímetros cuadrados, sería

Área de la cara lateral = 1/2 × 8 × RaízCuadrada (74,25) = 34,4673…
±= 34,47 (2 cd).

Como la pirámide tiene 4 caras laterales, los alumnos tuvieron oportunidad de verificar que multiplicando por 4 el área de una cara lateral se podría obtener el área lateral. He sugerido, en esta ocasión, que para este efecto, utilizasen un valor aproximado de la cara lateral con cuatro posiciones decimales, habiendo obtenido, en centímetros cuadrados

Área lateral = 4× 34,4674 = 137,8696 ±= 137,87 (2 cd).

Les hice notar que el valor del área lateral se podría obtener, también, multiplicando el semiperímetro de la base por la apotema de la pirámide. Después, con relativa facilidad, han constatado que el área total se calcula sumando el área lateral con el área de la base. Obtuvieron, entonces, en centímetros cuadrados

Área total ±= 137,87 + 64 ±= 197,87 (2 cd).

En lo que concierne al volumen de la pirámide les he informado, previamente, que la altura de la pirámide es la distancia al vértice común a las caras laterales (que señalé se denomina vértice principal o, simplemente, vértice de la pirámide) y se encuentra en el plano de la base. Después, para la determinación del volumen, referí que deberían calcular la tercera parte del producto del área de la base por la altura de la pirámide.

Volumen de la pirámide = 1/3 × área de la base × altura

Para la determinación de la altura he señalado que el triángulo definido por el centro de la base, por el vértice de la pirámide y por el punto medio de una arista de la base (esto es, el triángulo donde el dedo pulgar soportaba a la pirámide, así como los puntos donde los indicadores tocaban la pirámide) era un triángulo rectángulo en el que la altura de la pirámide es uno de los catetos, el segmento que une el centro de la base al punto medio de la arista de la base en cuestión es el otro cateto y la apotema de la pirámide es la hipotenusa.

Referí, también, que siendo la base un polígono regular, el segmento de recta que une el centro de la base con el punto medio de una de las aristas de la base se denomina apotema de la base y que para la pirámide cuadrangular su longitud (en centímetros) es 4 por ser mitad del valor de la arista de la base.

Después, y designando por h la altura de la pirámide, he mostrado que el Teorema de Pitágoras proporciona la relación

Cuadrado (h) = Cuadrado (apotema de la pirámide) -
- Cuadrado (apotema de la base)
Así, Cuadrado (h) = Cuadrado (RaízCuadrada (74,25)) – Cuadrado (4).

Tiendo evidenciado que Cuadrado (RaízCuadrada (74,25)) = 74,25 obtuvieron

Cuadrado (h) = 74,25 – 16 = 58,25 lo que implica, en centímetros,
h = RaízCuadrada (58,25) = 7,63216… ±= 7,63 (2 cd)

Después, he sugerido que, utilizando para la altura de la pirámide un valor aproximado a 4 posiciones decimales, calculasen, el volumen de este sólido geométrico, habiéndose obtenido, en centímetros cúbicos:

Volumen = 1/3 × 64 × 7,6322 = 162,8203 ±= 162,82 (2 cd)

Cuando se dispone de una pirámide y de un prisma, con alturas iguales, y de tal modo que la base de la pirámide es geométricamente igual a cada una de las bases del prisma, una de las formas de sensibilizar la fórmula del volumen de la pirámide es llenar la pirámide con una sustancia adecuada como, por ejemplo, un líquido o arroz, y después vaciar esa substancia en el prisma y llevar los alumnos a constatar que es necesario llenar la pirámide tres veces para que el prisma quede completamente lleno, sin que haya ninguna sobra de la sustancia en juego.

Dado que la pirámide cuadrangular (regular, recta) y el prisma cuadrangular (regular, recto) del que yo disponía, tenían bases con diferentes dimensiones, no me fue posible, utilizando el procedimiento que he referido en el párrafo anterior, comparar sus volúmenes. Pero, como la pirámide en estudio presentaba la arista de la base con medida igual a la arista del cubo que fue estudiado anteriormente, y como la altura de la pirámide era ligeramente inferior a la arista del cubo, entonces, propuse a los alumnos que llenasen la pirámide con arroz y, a continuación, colocasen el arroz en el cubo. Los alumnos han constatado, en esta ocasión, que llenando tres veces la pirámide, el cubo quedaba casi lleno, de tal modo que el nivel de arroz quedaba a un altura idéntica al altura de la pirámide.

Figura 6.2.11.5-03: Procedimiento para comprobar que el volumen de la pirámide se obtiene dividiendo por 3 el producto del área de la base por la altura.

6.2.11.6 - La pirámide triangular (regular recta)

Además de la pirámide cuadrangular (regular recta), contemplada en la subsección anterior, los alumnos observaron una representación, también en acrílico, de la pirámide triangular (regular, recta) y la correspondiente planificación, a las cuales se refiere la figura siguiente, y que fue el último poliedro a estudiar.

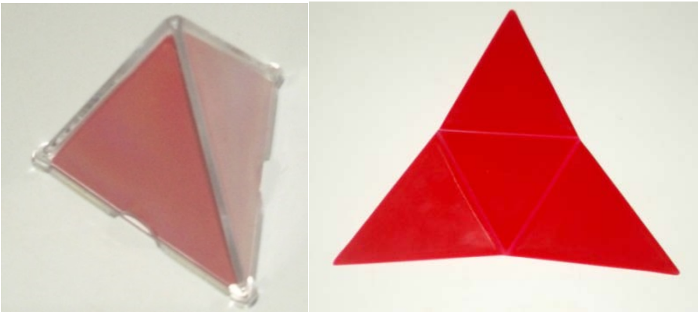


Figura 6.2.11.6-01: Pirámide triangular en acrílico conteniendo material plastificado para el estudio de su planificación

Los alumnos pudieron constatar que este sólido geométrico tiene cuatro caras triangulares, siendo una de ellas la base de la pirámide y las otras tres, geométricamente iguales entre sí, las caras laterales. Han verificado, también, que este sólido contempla cuatro vértices, tres en la base y uno que es común a las caras laterales y seis aristas, tres en la base y tres laterales.

Llamé su atención que cuando las cuatro caras son todas iguales la pirámide triangular tiene la designación de tetraedro.

He sugerido, también, que midiesen las aristas de la pirámide y que la manipulasen de modo semejante a como habían hecho para la pirámide cuadrangular (ver figura siguiente).

Figura 6.2.11.6-02: Relación entre la apotema de la pirámide, la arista lateral y la arista de la base.

Habiendo verificado los alumnos que la base de la pirámide era un triángulo equilátero cuyo lado medía 8 centímetros y solicitando que determinasen el perímetro y el área de la base de la pirámide, André refirió, de forma muy oportuna, que tales cálculos ya fueron hechos cuando fue estudiado el prisma triangular. Así, los alumnos, para la base de la pirámide, pasaron a disponer de los siguientes resultados:

Perímetro de la base = 24 centímetros.
Altura del triángulo (relativo a la base de la pirámide) =
= RaízCuadrada (48) = 6,928203…
= 6,9282 (4 cd), en centímetros.
Área da base = (8×RaízCuadrada (48)) / 2 = 27,71281 …
.±=27,71 (2 cd), en centímetros cuadrados.

Después, para el cálculo del área lateral, los formandos habiendo verificado que las aristas laterales median 9 centímetros, solicité que, previamente, determinasen la apotema de la pirámide. En este ámbito, y de modo semejante a como habían hecho para la pirámide cuadrangular, establecieran la relación

Cuadrado (Apotema de la pirámide) = Cuadrado (9) – Cuadrado (4) =
= 81 – 16 = 85 y, consecuentemente, en centímetros, fue obtenido el valor

Apotema de la Pirámide = RaízCuadrada (65) = 8,0622577…±= 8,06 (2 cd).

Después, para el cálculo del área lateral, utilizaron el procedimiento semejante al que fue utilizado para la pirámide cuadrangular, o sea, determinaron el área de una cara lateral y después multiplicaron por el número de caras laterales. Así, han obtenido, en centímetros cuadrados:

Área de una cara lateral = (8 × RaízCuadrada (65))/2 = 4 RaízCuadrada (65);

Área lateral = 3×4 RaízCuadrada (65) = 12 RaízCuadrada (65) =
= 96,74709…±= 96,75 (2cd).

Les pedí que calculasen, luego, el área total y sugerí que, como el resultado debería ser presentado a dos decimales, deberían utilizar los valores aproximados del área de la base y del área lateral con cuatro posiciones decimales. De aquí resultó, en centímetros cuadrados:

Área total ±= 27,7128 + 96,7476 = 124,4604 ±= 124,46 (2 cd)

En lo que respecta al volumen hice notar que, de modo análogo a lo que fue realizado para la pirámide cuadrangular, para el cálculo del volumen se debería conocer el valor de la altura de la pirámide y que, para la determinación de ésta, sería necesario conocer el valor de la apotema de la base.

Referí, entonces, que la apotema de la base, por tratarse de un triángulo equilátero, es igual a un tercio de su altura (del triángulo a que la base hace relación), habiendo señalado que ésta tiene el valor, en centímetros, de RaízCuadrada (48). Así, los alumnos han concluido que, también, en centímetros

Apotema de la base = RaízCuadrada (48) / 3 = 2,309401… = ±2,31 (cd)

Les recordé, también, a semejanza de lo que fue analizado para la pirámide cuadrangular (regular recta), que la apotema de la base, la altura de la pirámide y la apotema de la pirámide, por aplicación del Teorema de Pitágoras, y designando la altura de la pirámide por h, satisface la relación

Cuadrado (h) = Cuadrado (apotema de la pirámide) -
- Cuadrado (apotema de la base)
Así, Cuadrado (h) = Cuadrado (RaízCuadrada (65)) –
- (Cuadrado (RaízCuadrada (48) /3)

Señalé que cuando se tiene un numero positivo, o nulo, se obtiene el mismo número cuando se lo eleva al cuadrado y después se extrae la raíz cuadrada o, de forma semejante, cuando se extrae la raíz cuadrada y después se eleva al cuadrado.

Así, tiendo presente que

a) Cuadrado (RaízCuadrada(65)) = 65
b) Cuadrado (RaízCuadrada(48)) / 3) =
= Cuadrado (RaízCuadrada (48)/ Cuadrado (3) = 48 /9
c) 65 - 48/9 = 65× 9/9 – 48/9 = 585 /9 – 48/9 = 537/9

el resultado obtenido fue

h = RaízCuadrada (537 / 9) = RaízCuadrada (537) / RaízCuadrada (9) =
= RaízCuadrada (537) / 3 = 7,7244…±=7,72 (2 cd).

Después, para el volumen, sugerí que calculasen la tercera parte del producto del área de la base por la altura y que en este cálculo utilizasen, bien para el área de la base, bien para la altura, valores aproximados a 4 posiciones decimales. Entonces, en centímetros cúbicos, el valor obtenido fue

Volumen ±= 1/3 × 27,7128 × 7,7244 = 71,3549…±= 71,35 (2 cd).

En relación a un triángulo equilátero, cuando se refiere que la apotema es uno tercio de la altura, es útil que el profesor tenga presente la demonstración de esta relación, caso, naturalmente, de que en el contexto de la clase, considere oportuno destacarla y/o algún alumno manifieste curiosidad por tal hecho. Así, a continuación, se describe una demonstración.

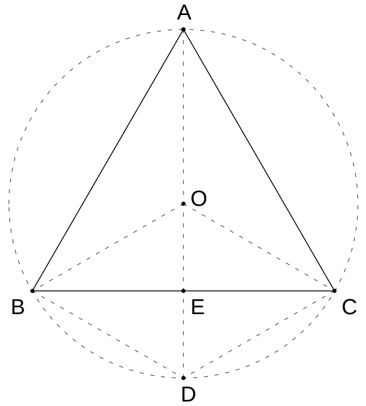


Figura 6.2.11.6-03: Relación entre la altura de un triángulo equilátero y la apotema.

La figura anterior muestra un triángulo equilátero [ABC], un ponto O como centro de la respectiva circunferencia circunscrita, el diámetro [AD] de esta circunferencia, los segmentos de recta [BD], [DC], [CO] y [OB], constituyendo un cuadrilátero, y el punto E resultante de la intersección de las diagonales de este cuadrilátero.

Con base en los dados, antes, presentados, puede afirmarse que:

1º cada uno de los arcos AB, BC y CA tiene por amplitud 120 grados;

2º como la amplitud del arco AD es 180 grados y dado que la amplitud del arco AB es 120 grados entonces el arco BD tiene por amplitud 60 grados;

3º el ángulo BAD mide 30 grados dado que es un ángulo inscrito y la amplitud del arco comprendido entre sus lados es 60 grados;

4º el triángulo [ABE] es rectángulo, pues el ángulo de vértice en A mide 30 grados, el de vértice en B mide 60 grados por lo que el ángulo de vértice en E es un ángulo recto y, consecuentemente, el segmento de recta [AE] hace relación a una de las alturas del triángulo equilátero [ABC];

5º el triángulo [ODC] es equilátero pues el ángulo de vértice en O mide 60 grados, por ser un ángulo del centro siendo de 60 grados la amplitud del arco comprendido entre sus lados, el ángulo de vértice en D mide, también, 60 grados, por ser un ángulo inscrito siendo de 120 grados la amplitud del arco comprendido entre sus lados, y, naturalmente, el tercer ángulo, el que tiene vértice en el punto C, mide, también, 60 grados, pues la suma de los ángulos internos de un cualquier triángulo es 180 grados;

6º como uno de los lados del triángulo equilátero [ODC] es uno radio de la circunferencia circunscrita los otros lados tienen, todos, obviamente, una longitud igual al radio de la circunferencia circunscrita;

7º de forma análoga se demuestra que el triángulo [BDO], también, es equilátero pues sus lados tienen una longitud igual al radio de la circunferencia circunscrita;

8º el cuadrilátero [OBDC] es un losange pues tiene los lados todos iguales;

9º el punto E es el punto medio del segmento [OD] pues el punto de intersección de las diagonales de un losange biseca cada una de ellas;

10º el segmento de recta [OE] se relaciona con la apotema del triángulo teniendo una longitud igual a mitad del radio de la circunferencia circunscrita;

11º la altura [AE] del triángulo tiene una longitud igual a 3/2 del radio de la circunferencia circunscrita;

12º finalmente, la razón entre las longitudes de la apotema del triángulo [ABC] y de la altura es, obviamente, 1/3.

Para pretender evidenciar esta demonstración para un alumno ciego se podrá, por ejemplo, utilizar el multiplano circular, como representación de la circunferencia circunscrita, en el cual serían insertados pins con etiquetas en braille para representar los puntos referidos en la figura, así como gomillas para interconectar los pins y representar los segmentos de recta.

6.2.11.7 - El cilindro (circular recto o de revolución)

Los alumnos, examinado el cilindro en acrílico que la figura siguiente muestra, tuvieron la oportunidad de comprobar que este sólido geométrico no es un poliedro ya que no está delimitado, solamente, por caras planas.

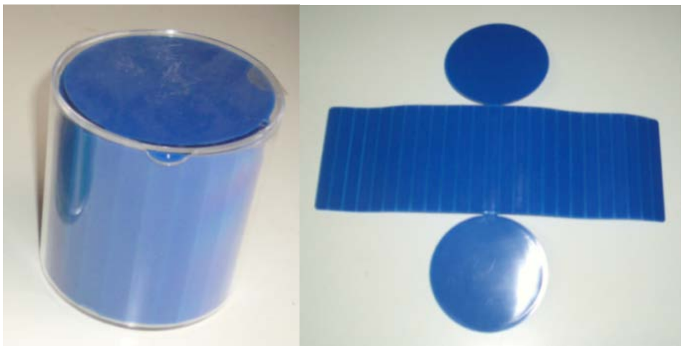


Figura 6.2.11.7-01: Cilindro en acrílico conteniendo material plastificado para estudio de su planificación

Les indiqué, que en la vida cotidiana, como representaciones de cilindros, se pueden presentar, como ejemplos, los pozos de agua, los tanques de combustible líquidos de una refinería, los cilindros de gas para consumo doméstico, los rollos de papel, los tambores, los extintores de incendio, y gran variedad de frascos que contienen mermeladas, por ejemplo entre muchos otros.

He explicitado, usando un rectángulo adecuado para este propósito, que un cilindro (circular recto o de revolución) puede ser generado girando un rectángulo alrededor de uno de sus lados. De esta manera, el lado opuesto del rectángulo genera una superficie curva, constituyendo la parte lateral del cilindro y, por ello, ese lado tiene la denominación de generatriz del cilindro. He resaltado, también, que a medida que es generada la parte lateral, cada uno de los otros dos lados del rectángulo va generando un círculo, que constituye cada uno de ellos una base del cilindro.

El rectángulo que utilicé (ver figura siguiente) tenía uno de los lados con longitud igual (cuatro centímetros) al radio de la base del cilindro, en acrílico, y al otro lado con una longitud (ocho centímetros) igual a la altura del cilindro, para poder resaltar que el cilindro de acrílico podría haber sido generado por un rectángulo geométricamente igual al que les fue presentado.

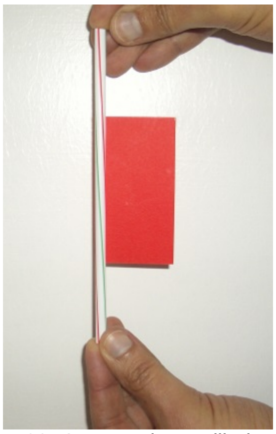


Figura 6.2.11.7-02: Generando un cilindro de revolución

Teniendo en cuenta la planificación del cilindro, he mostrado que el área lateral se calcula multiplicando el perímetro de la base por la altura (distancia entre las bases), el área total se obtiene adicionando el área lateral con las áreas de las dos bases, que son iguales entre sí, y que el volumen se determina multiplicando el área de la base por la altura.

Área lateral del cilindro = perímetro de la base × altura

Área total = área lateral + 2 × área de la base

Volumen del cilindro = área de la base × altura

Pedí a los alumnos que, para el cilindro que tenían a su disposición, y usando la regla con graduaciones en relieve, determinasen el valor del diámetro de la base y, también, la altura. Con base en estos valores y trabajando en conjunto, obtuvieron los siguientes resultados, en centímetros:

Diámetro de la base = 8, por medición directa utilizando la regla con graduaciones en relieve;

Altura del cilindro= 8, también, por medición directa;

Perímetro de la base = 8 × PI = 25,13274…±= 25,13 (2 cd).

Después, en centímetros cuadrados, obtuvieron:

Área de la base = PI × Cuadrado (4) = 50,26548… ±= 50,27 (2 cd);

Área lateral ±= 25,1328 × 8 = 201,0624 ±= 201,06 (2 cd);

Área total ±= 2×50,2655 + 201,0624 = 301,5934 ±= 301,60 (2cd).

Finalmente, para el volumen, en centímetros cúbicos, el valor obtenido fue

Volumen ±= 50,2655 × 8 = 402,1240 ±= 402,12   (2 cd).

Habiendo llevado, también, para la sala de clase el tambor que la figura siguiente muestra, solicité que, utilizando la regla con graduaciones en relieve, determinasen su volumen.

Figura 6.2.11.7-03: Un tambor como representación de un cilindro

Constatando que la altura del tambor medía 12 centímetros y que el diámetro de la base medía 20 centímetros, los alumnos han concluido que, en centímetros cuadrados, área de la base = PI × 10 y que, en centímetros cúbicos,

Volumen = PI ×10 × 12 = 376,9911… ±= 376,99 (2 cd).

6.2.11.8 - El cono (circular recto o de revolución)

Tal como para el estudio del cilindro, he pedido a los formandos que manipulasen un cono acrílico (que consta de la figura siguiente), que contiene en su interior material plastificado para el estudio de la respectiva planificación.

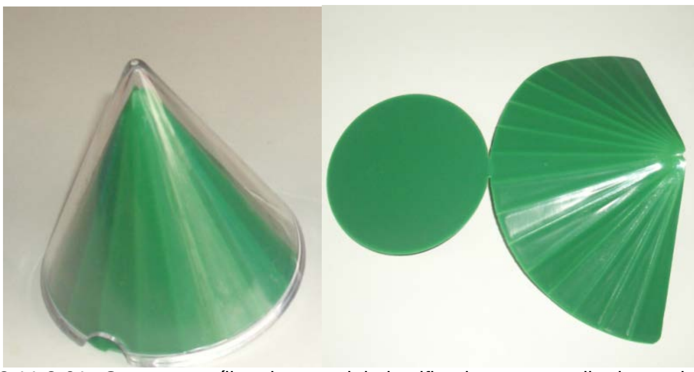


Figura 6.2.11.8-01: Cono en acrílico de material plastificado para estudio de su planificación

He mencionado que el cono (circular recto) se puede observar, por ejemplo, en un sombrero de payaso, en un embudo, en un sorbete o en un cono de señalización. La figura siguiente ilustra un cono de señalización que los alumnos tuvieron, también, la oportunidad de manipular.

Figura 6.2.11.8-02: Cono de señalización

Señalé que el cono (por supuesto que estoy refiriéndome al circular recto) puede ser generado mediante la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. De esta manera, la hipotenusa genera una superficie curva, formando la parte lateral del cono, y en este contexto, este lado del triángulo se denomina generatriz del cono. De manera similar a lo que se ha mencionado para el cilindro, también he señalado que, al mismo tiempo que se genera la parte lateral, el otro cateto va generando un círculo que formará la base del cono.

El triángulo rectángulo que he utilizado (ver figura siguiente) tenía uno de los catetos con longitud igual (8 cm) a la altura del cono en acrílico, y el otro cateto con longitud (4 centímetros) igual al radio de la base del referido cono, de modo que evidencia que el cono en acrílico podría haber sido generado por un triángulo congruente como lo que fue presentado a ellos.

El triángulo rectángulo que utilicé (ver figura siguiente) tenía uno de los catetos con una longitud igual (ocho centímetros) a la altura del cono, en acrílico, y el otro cateto con longitud (cuatro centímetros) igual al radio de la base del referido cono, para mostrar que el cono en acrílico podría haber sido generado por un triángulo congruente como el que fue presentado a ellos.

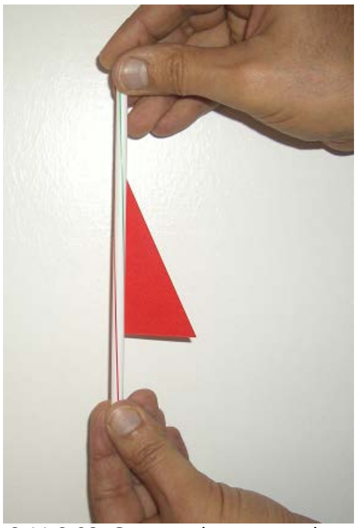


Figura 6.2.11.8-03: Generando un cono de revolución

Sugerí, es esa ocasión, que calculasen la generatriz del cono teniendo en cuenta que su medida sería, precisamente, la de la hipotenusa del triángulo rectángulo generador del cono. Camilo, utilizando la regla graduada, refirió que la hipotenusa del triángulo medía aproximadamente 9 centímetros. Les comenté, entonces, que podrían determinar tal valor a través del Teorema de Pitágoras. Daniel dijo, entonces, *¡se suma el cuadrado de ocho con el cuadrado de cuatro y después se determina la raíz cuadrada…!*

Han concluido, entonces, cómo la hipotenusa del triángulo rectángulo y, consecuentemente, la generatriz del cono, satisfacía la relación

Cuadrado (generatriz) = Cuadrado (8) + Cuadrado(4) = 64 + 16 = 80

y, consecuentemente, en centímetros, obtuvieron

Generatriz = RaízCuadrada (80) = 8,94427… ±= 8,94 (2 cd)

Solicité, luego, teniendo en cuenta que el radio medía 4 centímetros, que calculasen el perímetro y el área de la base del cono. André señaló, entonces, que la *base del cono es igual a la base del cilindro* (que ya había sido estudiado). *Muy bien observado*, dije yo. Teniendo presente la observación de André los alumnos reconocieran, entonces, que en centímetros:

Perímetro de la base = 8 × PI = 25,13274…±= 25,13 (2 cd);
y que, en centímetros cuadrados,

Área de la base = PI × Cuadrado (4) = 50,26548… ±= 50,27 (2 cd).

En lo que respecta al cálculo del área lateral les he llamado la atención que, una de las alternativas presentadas, en el ámbito de la pirámide (regular, recta) consistió en calcular la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide y que aquí, esto es, en el ámbito del cono (circular recto) el procedimiento es similar al de la pirámide: debiese calcular la mitad del producto del perímetro de la base del cono por su generatriz, es decir, por la hipotenusa del triángulo generador del cono.

Así, en centímetros cuadrados, utilizando valores aproximados a 4 posiciones decimales para el perímetro de la base y para la generatriz, obtuvieron, en centímetros cuadrados,

Área lateral ±= 1/2× 25,1327 × 8,9443 ±= 112,39720 ±= 112,40 (2 cd)

y, para el área total, también, en centímetros cuadrados, obtuvieron

Área total ±= 50,2655 + 112,3972 = 162,6627 ±= 162,66 (2 cd)

En lo que concierne al cálculo del volumen del cono, señalé que el procedimiento es idéntico a lo que ha sido practicado para la pirámide (la tercera parte del producto del área de la base por la altura) y he señalado, además, que la altura del cono es la distancia del vértice al plano de la base y que esa distancia es precisamente el valor del cateto del triángulo rectángulo alrededor del cual giró el triángulo. También, de modo similar a lo que fue practicado para la pirámide, fue utilizado arroz de modo que los alumnos tuvieran la oportunidad de verificar que llenando tres veces el cono con arroz y vertiendo el arroz en el cilindro, queda completamente lleno y no sobraría nada de arroz.

Señalé, entonces, que el volumen del cono = 1/3 × área de la base × altura.

Figura 6.2.11.8-04:Procedimiento para comprobar que el volumen del cono es un tercio del producto de la base por la altura.

Así, para el volumen del cono en acrílico, en centímetros cúbicos, los alumnos obtuvieran el valor aproximado

Volumen ±= 1/3 × 50,2655 × 8 = 134,0413… ±= 134,04 (2 cd).

6.2.11.9 - La esfera

Finalmente se procedió al estudio de la esfera. En la ocasión hice notar a ellos que una esfera se puede generar a partir de un semicírculo cuando este efectúa una rotación de 360 grados alrededor de su diámetro y, para el efecto, he utilizado un semicírculo en cartulina y una pajita para servir de eje de rotación.

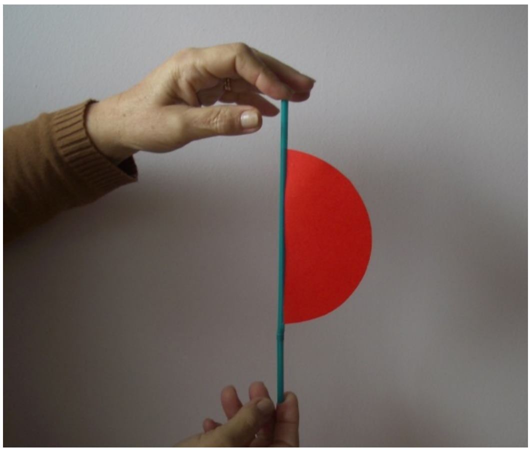


Figura 6.2.11.9-01: Generando una esfera

He referido, también, que la superficie envolviendo la esfera se denomina superficie esférica y, he mencionado, después, que el área de la superficie esférica es cuatro veces el área del círculo asociado al cual está asociado el semicírculo.

Área de la superficie esférica = 4 × PI × Cuadrado (radio).

Después, para el volumen de la esfera, señalé que se obtiene, a través, de la expresión

Volumen de la esfera = 4/3 × PI × radio × radio × radio

Para utilizaren las expresiones anteriores he solicitado que calculasen el área de las superficies esféricas y los volúmenes de las esferas de radio iguales a 1 y 2 centímetros.

Los estudiantes, trabajando juntos, obtuvieron los siguientes resultados:

Radio (en centímetros)	Área (en centímetros cuadrados)	Volumen (en centímetros cúbicos)
1	$4 \times PI \times 1^2 = 12{,}56$ (2 cd)	$(4/3) \times PI \times 1^3 = 4{,}19$ (2 cd)
2	$4 \times PI \times 2^2 = 50{,}24$ (2 cd)	$(4/3) \times PI \times 2^3 = 33{,}51$ (2 cd)

Hice notar que cuando el radio se duplica el área (de la superficie esférica) se cuadriplica y el volumen (de la esfera) se octuplica.

6.2.12 - Trabajo práctico

6.2.12.1 - Propuesta de Trabajo

Para aplicación a una situación concreta de la vida real, de los conocimientos aprehendidos a lo largo de la formación, he presentado a los alumnos el diseño de una vivienda unifamiliar, al cual se refiere la figura siguiente, con la particularidad de que para André y al Bento, ambos ciegos, tal diseño se ha hecho en relieve utilizándose, para ello, papel térmico[165].

Figura 6.2.12.1-01: Vivienda unifamiliar orientada al sur

Para una mejor comprensión del diseño, les he indicado que la vivienda contempla una sola planta y se compone de un salón/comedor, dos dormitorios, una cocina, una sala de baño, un zaguán y una zona de circulación.

Les he señalado que el frente de la vivienda, donde se encuentra la puerta de entrada, está orientada al sur y, en este contexto

- la sala común se encuentra en parte de frente y del lado oeste;
- la cocina se encuentra en la parte posterior, también en el lado oeste y tiene una pared en común con la sala común;
- en la parte levante se sitúan los dos dormitorios, ambos de iguales dimensiones,
- en la parte central, se encuentra el vestíbulo, la zona de circulación y la sala de baño.

He mencionado que la vivienda contempla, también, una piscina exterior al aire libre.

El trabajo que les fue propuesto fue realizar un presupuesto con miras a la ejecución de los siguientes arreglos:

[165] Expresiones portuguesas en el interior de la figura

a) colocación de mosaicos y azulejos en la sala de baño y en la cocina;

b) colocación de parqué madera en el pavimento de las restantes habitaciones;

c) pintura de paredes y techos;

d) colocación de pequeños azulejos vidriados en las paredes de la piscina.

Teniendo en cuenta la propuesta les he preguntado de qué informaciones necesitaban. Después de algunas dificultades iniciales, han concluido que precisaban de las medidas de las distintas habitaciones de la vivienda así como del precio de cada uno de los materiales a aplicar en los arreglos.

Entonces, las informaciones proporcionadas fueron las que se indican en los puntos siguientes.

1) Todas las habitaciones de la vivienda tienen la forma de un paralelepípedo recto. Así, dos caras opuestas como, por ejemplo, suelo y techo, tienen las mismas dimensiones.

2) En lo que respecta a las dimensiones, en metros, de las diversas habitaciones de la vivienda

   a) cocina: 4,5 m x 3,60 m;

   b) sala de baño: 1,65 m x 2,40 m;

   c) sala común: 4,5 m x 4,85 m;

   d) cada cuarto: 3,30 m x 4,20 m;

   e) zaguán: 1,65 m x 3,00 m;

   f) zona de circulaciones: 1,5 m x 2,25 m;

   g) la altura del suelo al techo de cada habitación es de 2,80 m.

3) En lo que concierne a los materiales a emplear y a los respectivos costos por unidad

   3.1) pavimentos

      a) cocina – mosaico de cerámica 30 cm x 30 cm (10€/m^2);

      b) sala de baño – mosaico de cerámica 40 cm x 40 cm (12€/m^2);

      c) sala común, cuartos, zaguán y zona de tránsito – parqué madera 30€/m^2.

3.2) paredes

a) cocina – azulejo de cerámica 20 cm x 20cm hasta una altura de 2,0m (15€/m^2). La parte restante es revestida con tinta plástica en estuco (1€/m^2);

b) sala de baño – azulejo cerámica 30 cm x 60cm en toda la altura (20€/m^2);

c) sala común, cuartos, zaguán y zona de circulaciones – pintura con tinta plástica en estuco (1€/m^2);

3.3) rodapiés

a) la sala común, los cuartos, el zaguán y la zona de tránsito contemplan rodapié en madera (6 €/m).

b) la cocina y la sala de baño no contemplan rodapiés.

3.4) techos: todos pintados con tinta plástica en estuco (1€/m^2).

También, en el ámbito de este proyecto, he señalado que

4) La piscina exterior, cuyas dimensiones (longitud x anchura x altura) son 5,0m x 3,0m x 1,6m debe ser revestida con azulejo pequeño que tiene un costo de 30€/m^2.

5) El costo da mano de obra es igual al costo de los materiales.

6) Las condiciones de pago son las siguientes.

a) señal inicial del 50% del costo total;

b) pago del 40 % en la conclusión de la obra;

c) pago del 10%, pasados 30 días de la conclusión de la obra;

Para la concretización del trabajo he elaborado un conjunto de preguntas que he distribuido por ocho grupos de cuestiones, que describo.

GRUPO I (relativo a la piscina exterior)

1) ¿cuál es la su capacidad?

2) ¿cuál es el área total?

3) ¿cuál es el costo de los pequeños azulejos vidriados a colocar en todas las superficies interiores (paredes y fondo) de la piscina?

GRUPO II (cocina)

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuantos mosaicos son necesarios para su cobertura?
3) ¿cuál es el costo de los mosaicos?
4) ¿cuál es la superficie total de las paredes, sin tener en cuentas el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
5) ¿cuál es la superficie total del área cubierta por los azulejos?
6) ¿cuantos azulejos son necesarios?
7) ¿cuál es el costo de esos azulejos?
8) ¿qué porción de las paredes no está cubierta por los azulejos?
9) ¿cuál es el área del techo?
10) ¿cuál es el área total en la cual va ser aplicada tinta plástica?

GRUPO III (cuarto de baño)

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuantos mosaicos son necesarios para su cubertura?
3) ¿cuál es el costo de los mosaicos?
4) ¿cuál es la superficie total de las paredes, sin tener en cuenta el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
5) ¿cuantos azulejos son necesarios?
6) ¿cuál es el costo de los azulejos?
7) ¿cuál es el área del techo?

GRUPO IV (cuarto común)

1) ¿cuál es la superficie del pavimento?
2) ¿cuál es el costo del parqué necesario para el pavimento?
3) ¿cuál es la dimensión del rodapié, sin tener en cuenta el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
4) ¿cuál es la superficie total de las paredes?
5) ¿cuál es el área del techo?

GRUPO V (cada cuarto)

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuál es el perímetro del rodapié?

3) ¿cuál es el área de las paredes, sin tener en cuenta el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
4) ¿cuál es el área del techo?
5) ¿cuál es el área total a ser cubierta en tinta plástica en estuco?

GRUPO VI (zaguán)

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuál es el perímetro del rodapié?
3) ¿cuál es el área de las paredes, sin tener en cuenta el espacio ocupado por las puertas?
4) ¿cuál es el área del techo?

GRUPO VII (zona de tránsito)

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuál es el perímetro del rodapié, sin tener en cuenta el espacio ocupado por las puertas?
3) ¿cuál es el área de las paredes, sin tener en cuenta el espacio ocupado por las puertas?
4) ¿cuál es el área del techo?
5) ¿cuál es el área total para ser cubierta en pintura plástica o en estuco?

GRUPO VIII (globalidad)

1) ¿cuál es el área total a ser cubierta con la tinta plástica?
2) ¿cuál es el costo de la tinta plástica?
3) ¿cuál es el perímetro total de los rodapiés?
4) ¿cuál es el costo de los rodapiés?
5) ¿cuál es el área total a ser cubierta por parqué de madera?
6) ¿cuál es el costo total del parqué?
7) ¿cuál es el costo total de los materiales?
8) ¿cuál es el costo total de la obra?
9) ¿cuál es el valor de la señal inicial?
10) ¿qué valor debe de ser pagado después de la conclusión de la obra?

11) ¿qué valor debe de ser abonado un mes después de la conclusión de los trabajos?

Como estrategia he sugerido que

A) todos, en conjunto, elaborasen el presupuesto para la piscina (grupo I de cuestiones);

B) que cada uno, de por sí, procurase elaborar el presupuesto relativo a una habitación, la cual sería diferente de un alumno a otro, y escogida de acuerdo entre todos (grupos de cuestiones II, III, IV, V, VI y VII);

C) que todos, en conjunto, elaborasen el presupuesto global, así como las condiciones de pago (grupo de cuestiones VIII).

6.2.12.2 - Presupuesto para la piscina

Para la resolución del Grupo I he señalado que la piscina tenía la misma forma geométrica como, por ejemplo, un acuario o la parte interior de una caja de cerillas, e hice pasar, con ese motivo, de mano en mano la parte interior de una caja de cerillas.

Figura 6.2.12.2-01: Parte interior de una caja de cerillas.

Les alerté de que respondiesen a cada una de las cuestiones por el orden que fueron presentadas por lo que deberían, en primer lugar, calcular la capacidad de la piscina. Para tal efecto he preguntado cómo deberían proceder. André respondió inmediatamente que se *debía multiplicar el largo por el ancho y, después, por la altura*. Todos han concluido que la capacidad de la piscina es, en metros cúbicos, 5,0 x 3,0 x 1,6 = 24.

Como curiosidad y habiendo observado que en muchos municipios en Portugal el precio del metro cúbico de agua es 2,5 €, les pregunté cuánto se gastaría, en este caso, cada vez que se llena la piscina. *Entonces se multiplicarían los 24 metros cúbicos por 2.5*, dijo Daniel, estando todos de acuerdo. André, a través de cálculo mental, y Francisca, usando la calculadora, indicaron que el valor sería 60 (euros, por supuesto).

Teniendo presente el interior de la caja de cerillas que ellos habían manipulado, he solicitado que me indicasen dónde debería ser colocado el azulejo pequeño para el revestimiento de la piscina. En este punto de vista ninguno de los alumnos ha manifestado dificultad alguna pues, prontamente, han contestado que en la parte lateral y en el fondo.

En cuanto al área del fondo, casi simultáneamente, André y Daniel han indicado ser 15 (metros cuadrados, naturalmente). *¿Y en cuanto al área de las paredes de la piscina?* les he preguntado, habiendo sugerido que antes de responder analizasen de nuevo la parte interior de la caja de cerillas y que se cuestionasen cómo deberían calcular el área de las paredes interiores.

André sugirió que se calculase el área de cada una de las (cuatro) paredes y luego se añadiese todo. Daniel asintió, de inmediato. Los restantes, también, acabaron por asentir. Sugerí, entonces, que procediesen de la manera que habían indicado y les pregunté *¿cuáles eran las dimensiones de las paredes con mayor área?* Daniel mencionó 5 y 1,6 (metros, naturalmente insistí yo).

Sugerí, entonces, que Bento indicase cual era el valor del área de cada una de ellas. Por cálculo mental indicó 8. Francisca usando una calculadora hablante confirmó el resultado. Una vez más, les advertí que deberían señalar que el valor del área es 8 metros cuadrados.

Después pregunté a Camilo: *¿cuáles eran las dimensiones de las dos paredes de la piscina con menor área?* Titubeó un poco, pero como una pequeña ayuda, acabó por indica 3 y 1,6 (metros). Entonces, insistí para que indicase cuál era el valor del área de cada una de ellas. Utilizando la máquina de Francisca, Camilo concluyó que era 4,8 (insistí, de nuevo, metros cuadrados).

Referí, también, que ya habíamos calculado el área de paredes mayores, 8 metros cuadrados, cada una de ellas y de las más pequeñas, 4.8 metros cuadrados, también cada una de ellas. Dirigiéndome a la Edite, le pregunté: *¿cuál es el área total de las paredes de la piscina?* Como ella vacilase le llamé la atención sobre que debería analizar cuántas paredes de mayor área tenía la piscina, así como cuántas son las paredes de la piscina con el área más pequeña. Como en aquella ocasión Daniel ya había concluido que el área total de las paredes de la piscina era 25,6 (metros cuadrados) y como Edite continuase vacilando, yo sugerí que Daniel explicase cómo había llegado a ese valor.

Daniel, con seguridad, señaló que hay dos paredes más grandes, cuya área es de 16 (metros cuadrados) y dos más pequeñas con un área de 9,6 (metros cuadrados) entonces el área total es de 16 + 9.6 = 25,2 (metros cuadrados).

Todos entendieron lo que él dijo. En esta ocasión les he presentado la parte interior de otra caja de cerillas, debidamente planificada, según lo muestra la figura siguiente, y les dije que había otra manera de calcular el área total de las paredes de la piscina, modo que ya habían observado anteriormente cuando fue estudiado el paralelepípedo (recto).

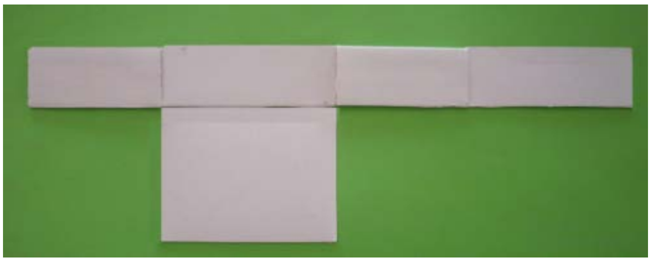


Figura 6.2.12.2-02. Una planificación de la parte interior de una caja de cerillas.

Para ello llamé a atención de que había dos rectángulos a considerar: uno relativo al fondo de la caja de cerillas y otro derivado de la conjunción de las cuatro caras laterales. André dijo, entonces, que el área total de las paredes de la piscina se podría obtener multiplicando el perímetro del fondo por la altura. Daniel concordó de inmediato, Bento y Francisca más tarde, mientras Camilo y Edite, solamente después de una nueva explicación, acabaron, también, por asentir.

Solicité, entonces, que me indicasen cuál era el perímetro del fondo de la piscina y Daniel, de inmediato, respondió 16 metros. Le pregunté cómo había obtenido este resultado y me dijo que añadió dos veces el 5 con dos veces el 3. Todos asintieron. Luego pedí a Francisca que me indicara cuál era el valor del área. Ella, usando la calculadora parlante, multiplicó 16 por 1,6 y concluyó que el valor del área era 25.2. *¿En qué unidades?* insistí yo. En *metros cuadrados*, respondió ella.

Pregunté: *¿cuántos metros cuadrados de azulejo pequeño deben adquirirse entonces?* André respondió rápido: *añádanse los 15 metros cuadrados del fondo con los 25,2 metros cuadrados de las paredes, lo que da... 40,2 metros cuadrados.* Francisca, siempre a través de la calculadora, confirmó el resultado.

Les llamé, en esta ocasión, la atención de que las empresas ponen a disposición del público el azulejo pequeño en cajas que contienen 1 metro cuadrado cada una, por lo que, para los 40,2 metros cuadrados, tendría que adquirir 41 cajas.

Habiéndoles recordado que el costo de cada metro cuadrado del azulejo pequeño era 30 €, no tuvieron dificultad en concluir que sería de 1.230 € el costo del azulejo pequeño para revestir la piscina.

6.2.12.3 - Presupuesto para la vivienda

Tal como fuera planeado se distribuyeron a cada uno de los alumnos los datos inherentes a una determinada habitación de la vivienda habiendo sido la distribución, tras consenso entre todos, la que consta en la siguiente tabla:

Alumno	Habitación	Grupo
André	Cocina	II
Bento	Sala común	IV
Camilo	Hall de entrada	VI
Daniel	Sala de baño	III
Edite	Zona de circulaciones	VII
Francisca	cuarto (1 o 2)	V

Para la ejecución de las tareas solicitadas, he organizado la información, habitación por habitación, tal como lo evidencio a continuación, habiéndola enviado a los alumnos por correo electrónico, tal como fue hecho para los textos de apoyo, de modo que la pudiesen leer a través de software apropiado[166]. Debo señalar, sin embargo, que al André y al Bento, en la información que he enviado a ellos, tuve el cuidado de ser lo más descriptivo posible.

A André, para poder responder a las preguntas relativas al grupo II (cocina) fue proporcionada la siguiente información:

- el suelo de la cocina tiene por dimensiones 4,5 m x 3,60 m y será cubierto por mosaico de cerámica 30 cm x 30 cm (10€/m^2);
- la altura del suelo hasta el techo (altura interior) es de 2,80 m;
- las paredes serán cubiertas, hasta una altura de 2,0 metros, de azulejo cerámico de 20 cm x 20 cm (15 €/m^2);
- en la parte restante de las paredes y en el techo será aplicada pintura plástica en estuco (1€/m^2);
- no debe ser tenido en consideración el espacio ocupado por la puerta o por la ventana de esa habitación de la vivienda.

A Daniel, para poder responder a las preguntas del grupo III (cuarto de baño) fue proporcionada la siguiente información:

- el suelo de la sala de baño tiene por dimensiones 1.65 m x 2,40 m y será cubierto por mosaico cerámico 40 cm x 40 cm (12 €/ m^2);
- la altura desde el suelo hasta el techo (altura interior) es de 2,80 m;
- las paredes serán revestidas en azulejo cerámico 30 cm x 60 cm en

[166] el lector de pantalla JAWS, para André y Bento, y con ampliación conveniente para los restantes.

toda la altura (20 €/m^2);

- en el techo será aplicado pintura plástica en estuco (1€ / m^2);
- no debe ser tenido en cuenta el espacio ocupado por la puerta y por la ventana de esta habitación de la vivienda.

A Bento, para poder dar respuesta a las cuestiones al grupo IV (sala común) las informaciones proporcionadas fueran las que se siguen.

- el suelo de la sala tiene por dimensiones 4,5 m x 4,85 m y en él será aplicado parqué de madera (30 €/ m^2).
- la altura desde el suelo hasta el techo (altura interior) es de 2,80 m;
- las paredes y el techo serán cubiertas con pintura plástica en estuco (1 €/m^2);
- la habitación contempla, también, rodapié de madera (6 €/m);
- no debe ser tenido en cuenta el espacio ocupado por las puertas y por la ventana de esta habitación de la vivienda.

Respecto al grupo V (dormitorio 1 o dormitorio 2), las informaciones proporcionadas la Francisca fueran las siguientes:

- los dos dormitorios son idénticos;
- el pavimento tiene por dimensiones 3,30m x 4,20 m y en él será aplicado parqué madera (30 €/m^2);
- la altura desde el pavimento hasta el techo (altura interior) es de 2,80 m;
- las paredes y el techo serán cubiertas con pintura plástica en estuco (1 €/ metro cuadrado);
- la habitación también incluye un rodapié de madera (6 €/m);
- no deben ser tenidos en cuenta el espacio ocupado por la puerta y por la ventana.

Camilo fue encargado de responder a las cuestiones del Grupo VI (zaguán), con base a la información siguiente:

- el suelo del zaguán tiene por dimensiones 1,65 m x 3,00 m y en él se aplicará parqué de madera (30 €/ m^2);
- la altura desde el pavimento hasta el techo (altura interior) es de 2,80m;

- las paredes y el techo serán cubiertas con pintura plástica en estuco (1€/ m^2);
- la habitación también incluye un rodapié de madera (6 €/m);
- no deben ser tenidos en cuenta el espacio ocupado por las puertas que dan al hall de entrada.

Finalmente a Edite, para poder responder a las cuestiones del Grupo VII (zona de tránsito), fue proporcionada la siguiente información:

- el pavimento de la zona de circulaciones tiene por dimensiones 1,65 m x 3,00 m y en él se aplicará parqué madera (30 €/m^2);
- la altura desde el suelo hasta el techo (altura interior) es de 2,80 m;
- las paredes y el techo serán cubiertas con pintura plástica en estuco (1€/ m^2);
- la habitación también incluye un rodapié en madera (6€/m);
- no son tenidas en cuenta el espacio ocupado por las puertas que sirven a la zona de tránsito.

He solicitado, también, a cada alumno que indicase las respuestas que han obtenido así como la justificación para las mismas.

El primero a pronunciarse fue André a quien cupo contestar las preguntas: relativas al grupo II, relacionadas con la cocina.

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuantos mosaicos son necesarios para su cobertura?
3) ¿cuál es el costo de los mosaicos?
4) ¿cuál es la superficie total de las paredes, sin tener en atención el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
5) ¿cuál es la superficie total del área cubierta por los azulejos?
6) ¿cuantos azulejos son necesarios?
7) ¿cuál es el costo de esos azulejos?
8) ¿qué porción de las paredes no está cubierta por los azulejos?
9) ¿cuál es el área del techo?
10) ¿cuál es el área total en la cual va ser aplicada pintura plástica?

1) indicó que el área del suelo de la cocina era 16,2 metros cuadrados, habiendo obtenido este resultado a través del producto de 4,50 metros (largo) por 3,60 metros (anchura);

2) mencionó que para cubrir el suelo son necesarios 180 mosaicos. Para alcanzar este resultado calculó el área de cada mosaico 0,30 x 0,30 = 0,09 (metros cuadrados) y determinó cuántas veces este valor cabía en 16,2 (metros cuadrados);

3) afirmó que el costo del pavimento será de 162 euros. Con este fin, multiplicó 6,2 (metros cuadrados) 10 (euros por metro cuadrado). En esta ocasión, tal como yo lo había hecho cuando la resolución del grupo I, relativo a la piscina, señalé que las empresas de materiales de construcción, sólo venden los mosaicos en cajas de 1 metro cuadrado, por lo que el costo del pavimento será 170 €, una vez que van ser adquiridas 17 cajas, conteniendo cada una de ellas 1 metro cuadrado de mosaico);

4) indicó que para obtener el valor de la superficie total de las paredes, primero calculó el perímetro del suelo, 2 x 4,50 + 2 x 3,60 = 16,20 (metros) habiendo obtenido este valor sumando el doble del largo con el doble de la anchura. Después. multiplicó este valor por la altura, 2,80 (metros), habiendo obtenido 45,36 (metros cuadrados);

5) ha referido que el área total a cubrir de las paredes, por azulejos, es de 32,40 (metros cuadrados). Obtuvo este valor multiplicando el perímetro por la altura de dos metros;

6) para la determinación del número de azulejos hizo un cálculo similar al que se realizó para determinar el número de mosaicos para el suelo: calculó el área de cada azulejo (0,20 x 0,20 = 0.04 metros cuadrados) y determinó cuántas veces este valor cabía en 32,40 (metros cuadrados), habiendo concluido que serían necesarios 810 azulejos;

7) para determinar el costo de los azulejos multiplicó 32,40 por 15 euros, el costo de cada metro cuadrado, y obtuvo 486 euros. Sin embargo, teniendo en cuenta que el material se suministra en cajas de 1 metro cuadrado, él mismo señaló que se debería haber multiplicado 33 por 15, lo que daría un total de 495 (euros).

8) para determinar el valor de la porción de las paredes no cubiertas por los azulejos dijo que hizo una simple substracción entre el área total de las paredes (45,36 metros cuadrados) y el área cubierta por los azulejos (32,40 metros cuadrados) habiendo obtenido el valor de 12,96 (metros cuadrados);

9) refirió que el área del techo era igual al área del suelo, luego 16,20 metros cuadrados;

10) dijo que sumó el valor del área del techo (16,20 metros cuadrados) con el valor del área de las paredes no cubiertas por azulejos (12,96 metros cuadrados), habiendo obtenido el resultado de 29,16 metros cuadrados.

Daniel tenía la tarea de responder a las preguntas relacionadas con el cuarto de baño y que constituyen el grupo III:

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuantos mosaicos son necesarios para su cubertura?
3) ¿cuál es el costo de los mosaicos?
4) ¿cuál es la superficie total de las paredes, sin tener en cuenta el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
5) ¿cuantos azulejos son necesarios?
6) ¿cuál es el costo de los azulejos?
7) ¿cuál es el área del techo?

Respondió con claridad y declaró que

1) el suelo del cuarto de baño tiene 3,96 metros cuadrados de área. Obtuvo esta cifra multiplicando 1,65 metros por 2,40 metros;

2) He calculado el área de cada mosaico, habiendo previamente reducido las dimensiones de centímetros a metros y obteniendo el valor de 0,16 (metros cuadrados). Luego, a través de una regla de tres simple

1 (mosaico) – 0,16 (metros cuadrados)
x – 3,96 (metros cuadrados)

ha concluido que serían necesarios 24,75 mosaicos. En esta ocasión, yo señalé que se deberá proporcionar 25 mosaicos, (teniendo en cuenta que este tipo de material se suministra en piezas completas);

3) como el área del cuarto de baño son 3,96 metros cuadrados, él mismo, refirió que se deberían comprar 4 cajas de mosaicos de 1 metro cuadrado a un costo de 12 euros, lo que daría 48 euros;

4) para obtener el valor total de la superficie de las paredes ha multiplicado el perímetro del pavimento 2 x 1,65 + 2 x 2,40 = 3,96 (metros) por la altura (2,80 metros) habiendo obtenido el valor de 22,68 (metros cuadrados, por supuesto);

5) ha determinado el número de azulejos de modo semejante al modo como determinó el número de mosaicos

1 (azulejo) - 0,18 (metros cuadrados)

x - 22,68 (metros cuadrados)

habiendo concluido que serían necesarios 126 azulejos;

6) para el costo de los azulejos obtuvo el valor de 460 (=23 × 20) euros teniendo la precaución de redondear 22,68 a la unidad superior;

7) indicó que el área del techo es igual al área del pavimento, luego, 3,96 metros cuadrados.

Bento tuvo la misión de determinar los cálculos relativos a la sala común:

1) ¿cuál era la superficie del pavimento?
2) ¿cuál era el costo del parqué necesario para el pavimento?
3) ¿cuál era la dimensión del rodapié, sin tener atención el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?
4) ¿cuál es la superficie total de las paredes?
5) ¿cuál es el área del techo?

Sus resultados no indicaban cualesquier unidades, como metros o metros cuadrados, por lo que hubo necesidad de evidenciarle tal hecho.

1) multiplicó el largo por la anchura habiendo obtenido 4,50 x 4,85 = 21,825 (metros cuadrados, señalé en la ocasión);

2) para el perímetro sumó el largo con lo ancho y multiplicó este valor por dos, obteniendo (4,85 + 4) × 2 =18,70 (metros);

3) para el área total de las paredes dijo que multiplicó el perímetro del suelo por la altura y obtuvo el valor 18,70 × 2,80 = 52,36 (metros cuadrados);

4) presentó el valor 21,825 (metros cuadrados) explicando que el suelo y el techo tienen la misma área;

5) sumó el área de las paredes con el área del techo 52,36 + 21,825 = 74.185 (metros cuadrados)

Francisca, que respondió a las preguntas relativas a uno de los cuartos de dormir, explicó los cálculos que hizo, como Bento, los resultados, que obtuvo, también, no daban ninguna unidad.

GRUPO V (cada cuarto)

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuál es el perímetro del rodapié?
3) ¿cuáles el área de las paredes, sin prestar atención el espacio ocupado por la puerta y por la ventana?

4) ¿cuál es el área del techo?

5) ¿cuál es el área total a ser cubierta en pintura plástica en estuco?

Las respuestas fueron las siguientes:

1) multiplicó el largo por la anchura y obtuvo 3,30 x 4,20 = 13,86 (en metros cuadrados, para la ocasión);

2) para el cálculo del perímetro hizo: 4,85 + 4,85 + 3,30 + 3,30 = 16,30 (en metros);

3) para el área total de las paredes calculó, en primer lugar, el área de cada una de las paredes y, después, sumó todo.

Hizo 4,85 × 2,80 = 13,58; 3,30 × 2,80 = 9,24 y después 13,58 + 9,24 + 13,58 + 9,24 = 45,64 (en metros cuadrados). Llamé su atención que podría, de forma más simple, multiplicar el perímetro del suelo por la altura, lo que daría 16,30 × 2,80 = 45,64;

4) refirió que el techo y el suelo tienen la misma área: 3,86 (en metros cuadrados);

5) para el área total supo sumar el área total de las paredes con el área del techo, obteniendo el valor 45,64 + 13,86 = 59,5 (en metros cuadrados).

Camilo tuvo la tarea de responder a las preguntas que fueron solicitadas, relativas al zaguán:

1) ¿cuál es el área del pavimento?

2) ¿cuál es el perímetro del rodapié?

3) ¿cuál es el área de las paredes, sin prestar atención el espacio ocupado por las puertas?

4) ¿cuál es el área del techo?

5) ¿cuál es el área total a ser cubierta por pintura plástica en estuco?

Necesitó del mi apoyo, de una forma continua, presentando los resultados siguientes:

1) 1,65 x 3,00 = 4,95 (en metros cuadrados);

2) 2 x (1,65 + 3,00) = 9,30 (en metros)

3) 9,30 x 2,80 = 26,04 (en metros cuadrados);

4) 4,95 (en metros cuadrados), porque el área del techo es igual al área del suelo;

5) 26,04 + 4,95 = 30,99 (en metros cuadrados).

Edite tuvo la tarea de responder a las preguntas relativas a la zona de tránsito .

1) ¿cuál es el área del pavimento?
2) ¿cuál es el perímetro del rodapié, sin se tener en atención el espacio ocupado por las puertas?
3) ¿cuál es el área de las paredes, sin tener en cuenta el espacio ocupado por las puertas?
4) ¿cuál es el área del techo?
5) ¿cuál es el área total a ser cubierta en pintura plástica en estuco?

Tal como Camilo, también, ella precisó de la mi ayuda, de una froma continuada, presentando los siguientes resultados:

1) 1,50 x 2,25 = 3,375 (en metros cuadrados);

2) 2 x (1,50 + 2,25) =7,50 (en metros);

3) 7,50 x 2,80 = 21,00 (en metros cuadrados);

4) 3,375 (en metros cuadrados). El área del suelo y el área del techo son iguales;

5) 21 + 3,375 = 24,375 (en metros cuadrados).

Tal como había sido acordado, los alumnos, en conjunto, responderían al último grupo (VIII), compuesto por las siguientes preguntas:

1) ¿cuál era el área total a ser cubierta con la pintura plástica?
2) ¿cuál era el costo de la pintura plástica?
3) ¿cuál era el perímetro total de los rodapiés a ser aplicados?
4) ¿cuál era el costo de los rodapiés?
5) ¿cuál era el área total a ser cubierta por parqué de madera?
6) ¿cuál era el costo total del parqué?
7) ¿cuál era el costo total de los materiales?
8) ¿cuál era el costo total da obra?
9) ¿cuál era el valor de la señal inicial?
10) ¿qué valor debe de ser pagado luego de la conclusión de la obra?
11) ¿qué valor debe de ser pagado un mes después de la conclusión de los trabajos?

Las respuestas fueron las siguientes:

1) en el ámbito de esta respuesta cada uno de los alumnos mencionó el área de su habitación cubierta por pintura plástica en estuco, siendo los resultados colocados en la siguiente tabla

Habitación	Área a ser cubierta por pintura plástica en estuco (en metros cuadrados)
Cocina	29,16
Sala común	74,185
Hall de entrada	30,99
Sala de baño	3,96
Zona de tránsito	24,375
Cuarto de dormir 1	59,5
Cuarto de dormir 2	59,5
TOTAL	**281,66**

2) todos han concluido que el costo de la pintura plástica rondaría los 282 euros.

3) en lo que respecta a los rodapiés, la información compilada fue la siguiente

Habitación	Dimensión de los rodapiés (en metros)
Cocina	-
Sala común	18,70
Hall de entrada	9,30
Sala de baño	-
Zona de tránsito	7,50
Cuarto de dormir 1	15
Cuarto de dormir 2	15
TOTAL	**65,5**

4) En cuanto al costo de los rodapiés, y teniendo presente que solamente se venden unidades completas, se obtuvo el resultado 66 × 6 = 396 (euros);

5) En lo que respecta al área total a ser cubierta por parqué de madera la información obtenida de cada uno de los alumnos fue como sigue:

Habitación	Área a ser cubierta por parqué en madera (en metros cuadrados)
Cocina	-
Sala común	21,825
Hall de entrada	4,95
Sala de baño	-
Zona de tránsito	3,375
Cuarto de dormir 1	13,86
Cuarto de dormir 2	13,86
TOTAL	**36,045**

6) Como solamente se venden unidades enteras de parqué entonces el costo inherente a este material será de 37 x 30 = 1110 (euros);

7) Para determinar el costo total de los materiales he sugerido, luego de inmediato, a André que se suman los costos de cada tipo de material, sugerencia que obtuvo el acuerdo de todos. Entonces yo indiqué que se debería rellenar una nueva tabla, en que una columna especificara los distintos tipos de materiales y en la otra columna se describieran los diferentes costos.

Tipo de material	**Costo en euros**
Azulejo pequeño para la piscina	1230
Mosaicos para la cocina	170
Azulejos para la cocina	495
Mosaicos para la sala de baño	48
Azulejos para la sala de baño	460
Parqué de madera	1110
Rodapiés	396
Pintura plástica en estuco	282
TOTAL	**4191**

8) Para la determinación del costo total de la obra les he llamado la atención que ésta contemplaba el costo de los materiales y el costo de mano de obra y que deberían tener en cuenta, que en el enunciado se explicitó que el costo de mano de obra sería igual al de los materiales. Por lo tanto no tuvieron ninguna dificultad en concluir que el costo total sería, en euros, 4.191 + 4.191 = 8.382.

Para las respuestas a las tres últimas preguntas, llamé la atención de los alumnos que, de acuerdo con el estipulado inicialmente, el pago se ajustaría a las siguientes condiciones:

a) señal inicial del 50% del costo total;

b) pago de 40% en la conclusión de la obra;

c) pago del 10% después de 30 días de la conclusión de la obra.

9) Solicité a Bento para indicase cuál era el valor de la señal inicial. Pensó y concluyó que un 50% de la globalidad es, precisamente, el valor total de los materiales, luego eran 4191 euros.

10) Después, he preguntado a Camilo que indicase cuánto es el 40% del costo total de la obra, que es el valor a pagar en la conclusión de la misma. Titubeó un poco y, sin embargo, André dijo a él: *multiplicas 8.382 por 40%*. Usando la máquina calculadora concluyó que serían 3352,8 Euros. Destaqué, entonces, que se trataba de 3352 euros *¿y cuántos céntimos?* he preguntado. André respondió listo: *80 céntimos*. Camilo refirió que tenía comprendido.

11) Finalmente, he solicitado a Edite que me indicase cuánto es el 10% de 8.382 euros, que es el valor a pagar al final de 30 días después de la conclusión de la obra. También dudó y Daniel le dijo: *divides por 10*. Como Edite tuviese con alguna dificultad en realizar el cálculo mentalmente, utilizando la calculadora, indicó 838,2. Entonces le indiqué: *son 838 euros y...¿cuántos céntimos?* Cómo Edite continuase dudando le dije que el valor indicado por la máquina, también podría ser referido como 838,20 lo que correspondería a 838 euros y*….20 céntimos*, dijo ella.

Como nota final y en lo relativo a este trabajo práctico he constatado que, en el decurso del mismo:

- André y Daniel no tuvieron ninguna dificultad, habiendo presentado los cálculos completamente correctos;

- Bento y Francisca han presentado los cálculos con pocas incorreciones, que fueron debidamente corregidas en diálogo conmigo teniendo, sin embargo, Bento evidenció más facilidad en la justificación de las respuestas que Francisca;

- Camilo y Edite tuvieron que tener todo mi apoyo para completar con éxito las tareas que les fueron atribuidas.

7 - CONCLUSIONES. PROPUESTA DE CURRICULO

7.1 - CONCLUSIONES

A continuación, y como consecuencia de nuestro estudio, se presentan las conclusiones específicas, numeradas de E1 a E16, y las conclusiones generales, numeradas de G1 a G6.

7.1.1 - Conclusiones Específicas

E1. Con el manejo de las tarjetas de débito/crédito en la representación de rectángulos y triángulos áureos los alumnos trabajaron **las habilidades manuales, el sentido de la proporción, la estética, la socio-comunicabilidad y, también, el despertar de la curiosidad por el mundo que les rodea.**

E2. Con la utilización de la placa de corcho, alfileres y gomillas, con el multiplano, pins y gomillas en la construcción de figuras geométricas, con las hojas de papel de cebolla y del papel térmico con representaciones de figuras geométricas y, también, con figuras representadas en cartulina, los alumnos **trabajaron el análisis, la percepción táctil, el sentido figurativo, la abstracción, el sentido espacial, la inteligibilidad y la síntesis.**

E3. Con la utilización de las pajitas como representaciones de rectas así como con la utilización de las manecillas del reloj didáctico, en la representación de ángulos, los alumnos trabajaron **las habilidades manuales y el sentido de orientación.**

E4. Con los transportadores con marcas en relieve los alumnos trabajaron **las habilidades manuales, las simetrías y el sentido de orientación.**

E5. Con los mecanismos metálicos representando un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una recta secante los alumnos trabajaron **las habilidades manuales, el sentido de orientación, el sentido lógico y el sentido espacial.**

E6. Con la regla articulada los alumnos trabajaron **las habilidades manuales, el sentido de orientación, el sentido lógico, el adiestramiento espacial y el sentido figurativo.**

E7. Con la clasificación de los polígonos **los alumnos trabajaron la memoria, la lógica y la inteligibilidad figurativa.**

E8. Con los problemas sobre cálculos de los perímetros y de las áreas de los triángulos y de los cuadriláteros los alumnos **trabajaron el cálculo geométrico mental, el cálculo algebraico y las nociones espacial y figurativa.**

E9. Con los puzles los alumnos trabajaron **el análisis, la percepción táctil, la lógica y la síntesis.**

E10. Con la cuerda de 13 nudos los alumnos trabajaron **el análisis, las habilidades manuales, la inteligibilidad, el cálculo mental y la percepción figurativa.**

E11. Con el conjunto de tres astas metálicas representando tres segmentos de recta, a cada una de las cuales está acoplado un alambre metálico representando la respectiva mediatriz, así como con el mecanismo metálico articulado representando un cuadrilátero y con unas gomillas que al unir los puntos medios de los lados del cuadrilátero define el paralelogramo de Varignon, los alumnos trabajaron **el análisis, la percepción táctil, la lógica, el sentido figurativo y la síntesis.**

E12. Con el número "PI" los alumnos **trabajaron los números irracionales, la lógica y la socio-comunicabilidad.**

E13. Con los sólidos geométricos los alumnos trabajaron **el análisis, la percepción táctil, el sentido figurativo, la simetría, la lógica, el sentido espacial, la concepción poliédrica y la síntesis.**

E14. Con la realización del presupuesto para una vivienda los alumnos trabajaron **el análisis, el sentido figurativo, el sentido espacial, la inteligibilidad, el cálculo aritmético, la simetría, el trabajo autónomo, el trabajo cooperativo, la síntesis y la socio-comunicabilidad**.

E15. En el cuadro siguiente se muestra, por alumno, para las 40 preguntas que fueron hechas, en la evaluación intermedia, el número de respuestas clasificadas en cada uno dos niveles 3, 2 y 1.

alumno	número de respuestas de		
	nivel 3	nivel 2	nivel 1
André	37	3	0
Bento	29	11	0
Camilo	6	23	11
Daniel	37	3	0
Edite	4	25	11
Francisca	21	19	0

Los resultados evidencian que André y Daniel han respondido correctamente y de forma autónoma a la grande mayoría (92,5%) de las cuestiones; que Bento respondió de forma autónoma a 72,5% de las cuestiones y que, con una pequeña ayuda respondió acertadamente a las restantes 27,5%; que Francisca respondió autónomamente a 52,5% de las preguntas y a 47,5% con una pequeña ayuda; que Camilo solo respondió, de forma acertada y autónomamente, a 15% de las preguntas, con una pequeña ayuda a 57,5% y a 27,5% con una grande ayuda y que Edite solamente respondió autónomamente a 10% de las cuestiones, con una pequeña ayuda respondió a 62,5% de las preguntas y necesitó de una grande ayuda para responder a 27,5% de las cuestiones.

La figura siguiente presenta, en términos porcentuales, una perspectiva global de los resultados obtenidos por los alumnos en las evaluaciones intermedias.

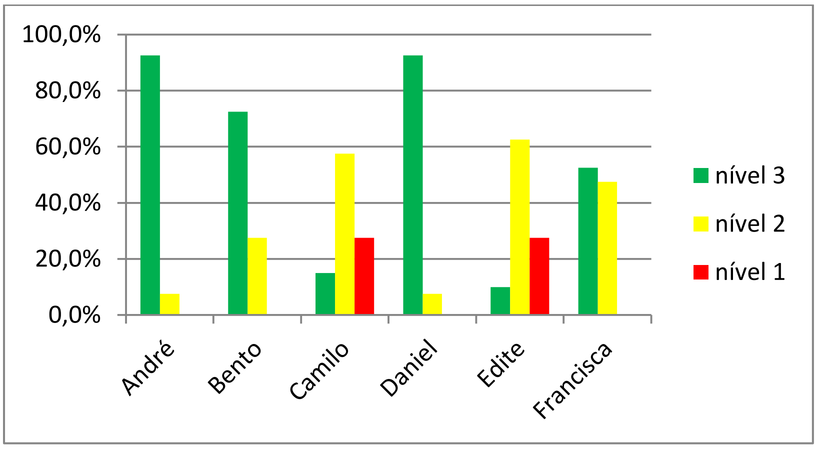


Figura 7.1.1-01: Diagrama de barras relativo a las calificaciones de los alumnos.

E16. Considerando una escala ordenada de 1 a 5, correspondiendo 5 al mayor nivel, y teniendo en cuenta, por un lado, los resultados observados y relativos a las habilidades, a los conocimientos y a las capacidades trabajados en la primera parte de la acción de formación y, por otro, la apreciación global que se fue elaborando de cada uno de los alumnos, incluyendo aquí su interés en el desarrollo de la competencia inherente a la elaboración del presupuesto para la remodelación de una vivienda unifamiliar, la clasificación del nivel de potencial de cada uno de los alumnos es la que muestro en la tabla siguiente,

Alumno	Nivel del potencial
André	5
Bento	4,5
Camilo	3
Daniel	5
Edite	3
Francisca	4

7.1.2 - Conclusiones Generales

G1. Sería muy deseable que Instituciones como la APEDV, que proliferaran en el ámbito nacional e internacional para cubrir la apremiante necesidad de que los alumnos con necesidades especiales, visuales y/o otras, por iniciativa de ciudadanos preocupados en ayudar sus semejantes, pudieran disfrutar, dentro del marco de la inclusión formativa, de similar o mayor atención que las de aquellos alumnos a los que no alcancen tales limitaciones.

G2. Cada alumno tuvo toda la libertad y autonomía para asistir a las clases. La gran asiduidad, sólo de por sí, y teniendo presente la informalidad con que la formación transcurrió, revela que ésta fue de su agrado.

G3. Con la formación los alumnos trabajaron habilidades, adquirieron y/o descubrieron conocimientos y desarrollaron capacidades por lo que, naturalmente, en términos potenciales, sus competencias se incrementaron.

G4. Las acciones de formación en que intervienen alumnos con necesidades visuales exigen del profesor cambios muy significativos en sus modos de enseñar lo que, en sí mismo, contribuye para su crecimiento profesional y, también, personal.

G5. En consecuencia del presente estudio de caso propongo un currículo de matemáticas para ser incluido, formalmente, en los cursos de la APEDV, y que puede, también, ser utilizado por otras instituciones similares, sea en Portugal sea en otros países. Naturalmente que, si tal ocurriera, cada institución, a partir de su propia experiencia, deberá hacer las adaptaciones que entendiere adecuadas

.

G6. En la actualidad, en que resulta imprescindible y precioso contar con las tecnologías de la Información y Comunicación, en su variada dinámica aplicativa, como fuente de mejoría del entorno didáctico de las personas con necesidades visuales, propongo, también, el desarrollo de dos líneas de investigación: una relativa a la elaboración de materiales, a través de impresoras 3D, y otra relativa a la utilización de cuadros interactivos, debiendo de tener los alumnos a su disposición equipamientos que posibiliten en las clases, en tiempo real, la participación y el cambio de información con el profesor y, también, los unos con los otros.

7.2 - PROPUESTA DE CURRICULO

7.2.1 - Introducción

Teniendo en cuenta:

1- Las conclusiones obtenidas a partir del presente estudio;

2- Mi convencimiento, atendiendo a mi larga carrera en la actividad docente, que si la formación hubiese tenido lugar integrada, de modo formal, en el curso que los alumnos frecuentan, los resultados presentados podrían ser mejorados de forma significativa dado que en esta situación la APEDV podría solicitar, a las entidades oficiales que financian el curso, la adquisición y/o la elaboración de recursos didácticos específicamente dirigidos para sus alumnos, que tienen la particularidad común de necesitar apoyos visuales;

3- Los alumnos de la APEDV, en su generalidad, aunque hayan frecuentado la enseñanza oficial, por las más diversas razones, no han adquirido conocimientos básicos en matemática, indispensables, bien para un mejor desempeño profesional, sea para una mejor inserción social

presento por tanto una propuesta de currículo para una asignatura de matemática para ser impartida en los cursos de fisioterapeuta/masajista y de telefonista/recepcionista que la APEDV proporciona.

7.2.2 - Justificaciones

El currículo propuesto contempla tres módulos, el primero intitulado "Algunos Conceptos Fundamentales", el segundo incidiendo sobre Geometría y el tercero relativo a la Introducción a la Estadística y a la Teoría de las

Probabilidades y pretende ser impartido durante un año escolar, que contempla 42 semanas, con una carga horaria semanal de 3 horas.

Teniendo en cuenta la justificación de cada uno de los tres módulos, empiezo por recordar lo que he referido en el capítulo de introducción.

> *"… Tomé la iniciativa, en Octubre de 2012, junto a la Dirección de la APEDV, de manifestar mi gran interés en proporcionar a los alumnos de esta institución, un curso de Matemática en que contemplaría dos módulos: uno de Geometría y otro de Estadística."*
>
> *"Con el estudio de la Geometría, debidamente reforzado con aspectos de Aritmética y de Álgebra, los alumnos tienen la posibilidad de ampliar y profundizar las capacidades de abstracción y de conceptualización e, incluso, la posibilidad de poder tornar más fácil la construcción de mapas mentales que, particularmente, las personas ciegas sienten necesidad de elaborar, cuando en el mundo real, se desplazan de un punto a otro. Con el estudio de la Estadística, pueden ampliar el crecimiento de capacidades socio-cognitivas muy importantes para una adecuada comprensión de los fenómenos socioeconómicos y sociopolíticos.*"

Desarrollada la parte práctica de la investigación, en que impartí de modo informal un módulo de geometría, durante 30 horas (como antes se ha señalado) al sugerir que el currículo sea impartido durante 42 semanas, con una carga lectiva semanal de 3 horas, propongo que sean contemplados no dos módulos, sino tres.

El primer módulo, tal como más arriba queda descrito, con la denominación de "Algunos Conceptos Fundamentales" tiene por objetivo proporcionar la enseñanza de nociones muy importantes, como por ejemplo, conjuntos, números y funciones, las cuales son utilizadas en todos los ramos de la matemática y, también, en muchos otros ramos del saber.

La justificación del módulo de Geometría se desprende de la propia definición de Geometría del matemático alemán Hans FREUDENTHAL, debidamente señalada en el capítulo anterior, al final de la sección 6.2.1.

En lo que dice respecto al módulo de Introducción a la Estadística y a la Teoría de las Probabilidades evidencio que, en lo cotidiano, todos nosotros nos encontramos, a través de los órganos de comunicación social, con noticias relativas, por ejemplo, entre muchos otros, a estudios de opinión, intenciones de voto, evolución de los precios de un determinado bien o tiempo medio de espera para una operación en una especialidad dada de la medicina. Así, poseer un mínimo de alfabetización en Estadística es importante, sea en el plano personal sea en la vertiente profesional, para saber interpretar innúmeros fenómenos sociales del mundo que nos rodea. A su vez, poseer conocimientos en Probabilidades permite comprender, por ejemplo, por qué, en un sorteo que involucra las poblaciones de España y Francia es más favorable, aunque muy ligeramente, que la selección recaiga en un boleto de una persona previamente seleccionada por nosotros, en el juego del euromillones, con una única apuesta, y considerar la clave premiada.

7.2.3 - Objetivos Generales

Los objetivos generales que se pretende alcanzar con el currículo propuesto están numerados de OG1 a OG5 y son los siguientes:

OG1- posibilitar a la generalidad de los alumnos de la APEDV recuperaren el gusto por el conocimiento matemático;

OG2 - poner a la disposición instrumentos matemáticos adecuados a los profesionales ciegos y ambliopes, que tienen bajo conocimiento en áreas de la Matemática Fundamental;

OG3 - mejorar la calidad de los aprendizajes;

OG4 - mejorar las capacidades de los alumnos no solamente en los ámbitos de la geometría, estadística y probabilidades así como, también, en los ámbitos de la lógica, de la imaginación, de la memoria, de la abstracción, del cálculo mental, del cálculo aritmético, del cálculo algebraico, de la aprehensión analítica a través de la percepción táctil, de lo espacial y de lo social;

OG5 - proporcionar a cada uno de los alumnos la posibilidad de sentirse más insertados en la sociedad.

7.2.4 - Bloque 1: Algunos Conceptos Fundamentales

En las subsecciones siguientes se presentan los contenidos de este bloque, numerados de 1.1 a 1.7, los objetivos específicos, numerados de OE.1.1 a OE.1.10 y, también, ejemplos de actividades prácticas, numeradas de AP.1.1 a AP.1.10.

7.2.4.1 - Contenidos del Bloque 1

1.1 Introducción a la Álgebra de los Conjuntos
1.2 De los números naturales a los números reales
1.3 Cuestiones de Lenguaje
1.4 Monomios y polinomios
1.5 Ecuaciones algebraicas
1.6 Representación de puntos en uno plano cartesiano
1.7 Funciones

7.2.4.2 - Objetivos específicos del bloque 1

Los objetivos específicos relacionados con este bloque están numerados de OE.1.1 a OE.1.10 y son los siguientes:

OE.1.1 – conocer los conceptos básicos inherentes al álgebra de los conjuntos (formas de representación de un conjunto, relación de pertenencia, relación de inclusión, complementariedad de un conjunto en un universo dado y operaciones binarias entre conjuntos);

OE.1.2 – dominar las operaciones básicas que engloban números racionales (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación con exponente entero, representación decimal y conversión en porcentaje) e identificar un dado número dado sea o no, racional;

OE.1.3 – saber clasificar una expresión dada;

OE.1.4 – saber sumar, sustraer y multiplicar dos monomios, un monomio con uno polinomio y dos polinomios;

OE.1.5 – saber resolver ecuaciones del primer y segundo grados con una incógnita, así como de un sistema de dos ecuaciones del primer grado con dos incógnitas;

OE.1.6 – resolver problemas cuya traducción matemática sea una ecuación del primer grado, o una ecuación del segundo grado, o un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas;

OE.1.7 – saber representar puntos en un plano cartesiano

OE.1.8 – comprender el concepto de función así como las diferentes formas de su representación.

OE.1.9 - entender el concepto de función afín, los significados de cada uno de sus parámetros y saber representarla geométricamente.

OE.1.10 - entender el concepto de función cuadrática, los significados de cada uno de sus parámetros y hacer una representación geométrica.

7.2.4.3 - Actividades prácticas relativas al bloque 1

A continuación, y a título de ejemplo, se presentan diez actividades, numeradas de AP.1.1 a AP.1.10, que pueden ser practicadas cuando se imparte este bloque. Sin embargo, se señala que en la sección siguiente se presenta, de forma exhaustiva, los indicadores de calidad para evaluar los aprendizajes de los alumnos, bien en lo relativo a este bloque, bien a los otros dos.

AP.1.1 – Presentar a cada uno de los alumnos un diagrama sagital, como por ejemplo, el que la figura siguiente muestra y solicitar la

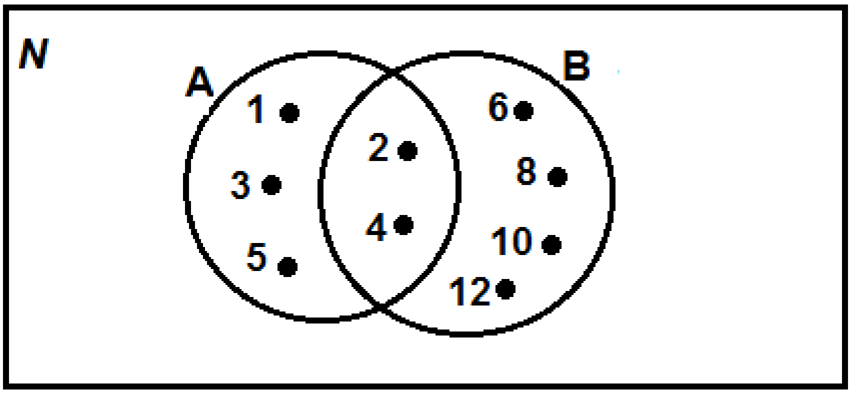


Figura 7.2.4.3-01: Representación de dos conjuntos A y B a través de un diagrama sagital

representación, bien en extensión bien en comprensión, de cada uno de los conjuntos siguientes:

a) A
b) B
c) A∩B
d) A∪B
e) A – B
f) B – A
g) Complementario (A)
h) Complementario (B)

Nota: Señálese que para los alumnos ciegos naturalmente que las figuras deben ser presentadas de modo que ellos las puedan leer en relieve, debiendo, también, los números, las letras y las señales de cada una de las operaciones en juego ser escritos en braille o, en su caso, a través de una forma de representación equivalente, con material adecuado a la percepción táctil.

AP.1.2 – Para desarrollar el cálculo mental, y admitiendo, por ejemplo, que la clase tiene 6 alumnos, empezar por un primer alumno y preguntar, también, a título de ejemplo, ¿cuánto es 6 veces 8? si la respuesta fuere correcta pedir a un segundo alumno que añada 12 al resultado anterior; después solicitar a un tercero que multiplique el resultado anterior por 3; a un cuarto que lo divida por 4; a un quinto alumno que lo divida por 5; al sexto que lo multiplique por 8 y, así, sucesivamente, hasta tener una respuesta que no sea cierta. El objetivo es que los alumnos tengan presente que su colaboración es muy importante para que la secuencia se prolongue lo más posible.

AP.1.3 – Si se designa, por ejemplo, un número natural dado por n, cómo se debe designar

a) ¿el doble de ese número?
b) ¿el cuadrado de ese número?
c) ¿la suma de ese número con 8?
d) ¿el doble de la suma de ese número con 8?
e) ¿la suma del doble de ese número con ocho?
f) ¿el cuadrado de la suma de ese número con 8?
g) ¿la suma del cuadrado de ese número con 8?

AP.1.4 – Para cada uno de los monomios presentados, identificar el coeficiente, la parte literal y el grado[167].

a) 12 m;
b) 4 x y;
c) 10 a^3;
d) 8;
e) ½ $x^2 y^3$;
f) – $a^2 b^2$.

[167] Para los alumnos ciegos la representación de las expresiones será presentaba en braille.

AP.1.5 – Resolver cada una de las condiciones siguientes:

a) $12\ m = 4\ m + 40$

b) $12\ m^2 = 4\ m + 40$

c) $3\ a + 2\ b = 7$ e $2\ a - 3\ b = 0$

d) $4\ n = 20 - n$

e) $20 - n = n^2$

f) $3 \times (a + b) = 15$ e $2 \times (a - b) = 2$

AP.1.6 - En una habitación el área del suelo es de 24 metros cuadrados. Sabiendo que la largura excede en dos metros a la anchura determinar las dimensiones del suelo de la habitación.

AP.1.7 - Con el multiplano y utilizando dos gomillas para representar los ejes cartesianos insertar pins, con etiquetas A, B, C, D, F y G, en los locales de coordinadas, respectivamente, (3, 5); (5, 3); (-5, 3); (-5, -3);
(5, 0) y (0, -3).

AP.1.8 - Considerar la función f definida del modo siguiente:

$$f: A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow B = \{ a, b, c, d\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Determinar el dominio, el contradominio y clasificar la función en cuanto a la inyectividad, a la sobreyectividad y a la biyectividad.

AP.1.9 - La representación gráfica siguiente se relaciona con una función afín[168].

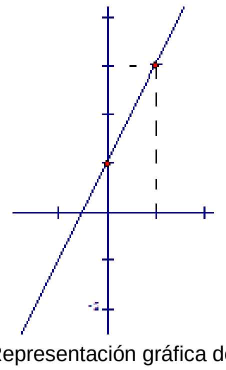


Figura 7.2.4.3-02: Representación gráfica de la función afín y= 2x +1

[168] Para los alumnos ciegos la figura deberá, naturalmente, ser presentada en relieve.

a) Determinar el declive, la ordenada en el origen y con estos elementos presentar la ecuación reducida de la función.

b) Determinar el cero, los intervalos dónde la función es positiva y dónde es negativa.

AP.1.10 – La representación gráfica[169] siguiente se refiere a la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 3$.

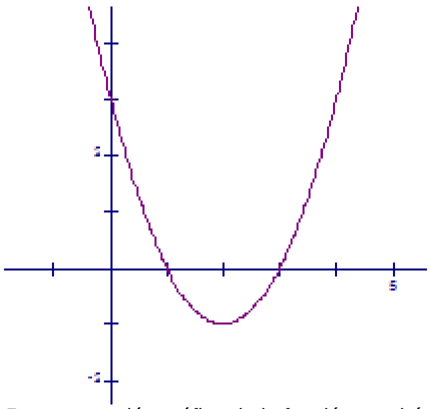


Figura 7.2.4.3-03: Representación gráfica de la función cuadrática $y=x^2-4x+3$

a) Verificar analíticamente que 1 y 3 son los ceros de la función y que las coordinadas del vértice son (2, -1).
b) Determinar los intervalos donde la función es
   b1) positiva;
   b2) negativa
   b3) creciente
   b4) decreciente.

7.2.5 - Bloque 2: Geometría

En las subsecciones siguientes se presentan los contenidos de este bloque, numerados de 2.1 a 2.7, los objetivos específicos, numerados de OE.2.1 a OE.2.8 y, también, ejemplos de actividades prácticas, numeradas de AP.2.1 a AP.2.9.

[169] idem

7.2.5.1 - Contenidos del Bloque 2

- 2.1 Elementos de geometría lineal, plana y espacial
- 2.2 Los ángulos
- 2.3 Sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante
- 2.4 De la línea poligonal al polígono
- 2.5. Los triángulos
- 2.6 Los cuadriláteros
- 2.7 La circunferencia y el círculo
- 2.8 Los sólidos geométricos

7.2.5.2 - Objetivos específicos del bloque 2

OE.2.1 – Reconocer que dos puntos distintos definen una recta, que tres puntos no contiguos definen uno plano, que dos rectas distintas coplanarias o son paralelas o son secantes y que, en el caso de ser secantes, o son oblicuas o son perpendiculares.

OE.2.2 – Dado un ángulo, saber utilizar un transportador para medir su amplitud y saber clasificarlo en cóncavo/convexo y, en el caso de ser convexo saber clasificarlo en nulo, agudo, recto, obtuso o llano.

OE.2.3 – Dado un ángulo en un sistema de dos rectas intersectadas por una secante identificar otro ángulo que relativamente a él sea alterno interno, o alterno externo, o correspondiente, u opuesto, o suplementario.

OE.2.4 – Saber en qué consiste una línea poligonal; saber clasificarla en simple o no simple y en el caso de ser simple saber clasificarla en cerrada o no cerrada y, además, en el caso de ser cerrada, reconocer si el polígono que define es cóncavo o convexo.

OE.2.5 – Dado uno triángulo saber clasificarlo en cuanto a los ángulos y en cuanto a los lados y saber, también, determinar su perímetro y su área.

OE.2.6 - Dado un cuadrilátero saber calcular su perímetro y su área así como clasificarlo en cóncavo o en convexo y en el caso de ser convexo clasificarlo en trapezoide, o en trapecio o en paralelogramo.

OE.2.7 – Saber calcular el perímetro de una circunferencia y el área de un círculo.

OE.2.8 – Dado un sólido geométrico, saber clasificarlo en poliedro o en no poliedro y saber cómo determinar su área de la base, su área lateral, su área total y su volumen y, también, saber aplicar estos conocimientos a un objeto de uso diario, que tenga la forma de uno de los sólidos geométricos estudiados.

7.2.5.3 - Actividades prácticas relativas al bloque 2

AP.2.1 – Con una placa de corcho, con pins con etiquetas en braille para representar puntos y elásticos para representar rectas, solicitar a los alumnos que identifiquen semirrectas y segmentos de recta en una recta dada y

AP.2.2 - Con una placa de corcho, con pins con etiquetas en braille para representar puntos y gomillas para representar rectas, solicitar a los alumnos que definan ángulos cóncavos, ángulos convexos y, en este caso, ángulos agudos, ángulos rectos, ángulos llanos y, también, a través de la utilización de un transportados que construyan ángulos con una amplitud dada. Solicitar, y también, que construyan ángulos adyacentes, ángulos complementarios y ángulos suplementarios.

AP.2.3 – Con el mecanismo metálico (presentado en las figuras 6.2.5-03 y 6.2.5-04) solicitar a los alumnos que identifiquen ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes, opuestos y suplementarios y que muestren que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180 grados.

AP.2.4 - Con una placa de corcho, con pins con etiquetas en braille para representar puntos, y gomillas para representar rectas, solicitar a los alumnos que construyan líneas poligonales simples, no simples, simples no cerradas, simples cerradas, que definan polígonos cóncavos, simples cerradas que definan polígonos convexos.

AP.2.5 – Presentar una colección de triángulos construidos en cartulina, contemplando los más diversos tipos, así como un transportador y una regla graduada, ambos con marcas en relieve, y solicitar a los alumnos bien individualmente bien en grupos de dos, que clasifiquen los triángulos y que calculen el perímetro y el área.

AP.2.6 – Presentar una colección de cuadriláteros construidos en cartulina, contemplando los más diversos tipos, así como un transportador y una regla graduada, ambos con marcas en relieve, y solicitar a los alumnos, bien individualmente bien en grupos de dos, que clasifiquen los cuadriláteros y que calculen su perímetro y el área.

AP.2.7 – Presentar objetos con una forma circular, así como una regla con marcas en relieve, y solicitar a los alumnos que calculen el perímetro y el área de ese objeto.

AP.2.8 – Presentar a los alumnos diversos objetos de la vida diaria, como, por ejemplo, una caja de zapatos, una caja de cerillas, una cazuela o uno cazo cilíndrico y solicitar el cálculo del área de la base, lateral, total y el volumen.

AP.2.9 – Presentar a la clase un presupuesto para una vivienda para ser resuelto el de una habitación por cada alumno y, después, para la vivienda, por todos en conjunto.

7.2.6 - Bloque 3: Introducción a la Estadística y a la Teoría de las Probabilidades

En las subsecciones siguientes se presentan los contenidos de este bloque, numerados de 3.1 a 3.7, los objetivos específicos, numerados de OE.3.1 a OE.3.7 y, también, ejemplos de actividades prácticas, numeradas de AP.3.1 a AP.3.9.

7.2.6.1 - Contenidos del Bloque 3

- 3.1 Conceptos Fundamentales.
- 3.2. Variables estadísticas cualitativas.
- 3.3 Variables estadísticas cuantitativas discretas.
- 3.4 Variables estadísticas cuantitativas continuas.
- 3.5 Las experiencias aleatorias.
- 3.6 La noción de probabilidad de un evento.
- 3.7 Cálculo combinatorio.

7.2.6.2 - Objetivos específicos del bloque 3

OE.3.1 – Comprender la diferencia entre población y muestra, saber lo que es una unidad estadística, identificar la dimensión de una muestra, clasificar atributos y entender el significado de variable estadística.

OE.3.2 – Dada una variable estadística cualitativa, saber agrupar los datos en categorías, hacer tablas de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas, identificar la moda y interpretar diagramas de barras y diagramas circulares.

OE.3.3 – Dada una variable estadística cuantitativa discreta, saber agrupar los datos en categorías, hacer tablas de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas, identificar la moda, calcular la media, la mediana y los cuartiles e interpretar diagramas de barras, diagramas circulares y diagramas de extremos y cuartiles.

OE.3.4 – Dada una variable estadística cuantitativa continua, saber agrupar los datos en clases con igual amplitud, hacer tablas de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas, identificar la clase modal así como la clase mediana, calcular la media, interpretar los histogramas de frecuencias absolutas y relativas, así como el polígono de frecuencias, y, a partir de la interpretación de la función cumulativa, determinar la mediana, los cuartiles, los deciles y los percentiles.

OE.3.5 – Distinguir entre experiencia aleatoria y experiencia determinista, identificar el espacio de resultados de una experiencia aleatoria, saber que cada evento se interpreta como subconjunto del espacio de resultados. Dado uno evento, saber clasificarlo en imposible, elemental o compuesto y reconocer un evento compuesto si es o no, cierto. Además deberá saber dar ejemplos de eventos compatibles, incompatibles y complementarios.

OE.3.6 – Comprender que a cada evento está asociado un número real comprendido entre 0, inclusive, y 1, también, inclusive, llamado probabilidad de ese evento, de tal modo que la probabilidad del evento cierto es 1 y la probabilidad de la reunión de dos eventos incompatibles es la suma de las probabilidades de cada uno de esos eventos. Además, en experiencias aleatorias con un número finito de eventos elementales, todos ellos con igual probabilidad de ocurrir, deberá tenerse en cuenta que la probabilidad de un evento se obtiene dividiendo el número de casos favorables a la ocurrencia de ese evento por el número de resultados posibles que la experiencia contempla.

OE.3.7 - Comprender el concepto de factorial de un número natural, distinguir entre combinaciones y variaciones de n elementos tomados k a k (con k no superior a n) y, si es necesario, calcular esos valores, y también, saber aplicar estos conceptos a problemas del mundo real.

7.2.6.3 - Actividades prácticas relativas al bloque 3

AP.3.1 – Presentar a cada alumno una tabla relativa a 15 adultos escogidos aleatoriamente en una institución, ficticia, de nombre TAGUS, con 180 empleados.

Sexo	Edad	color de los ojos	altura (en cm)	estado civil	número de hijos
F	34	castaño	162	casado	2
F	32	castaño	171	soltero	1
M	40	verde	174	casado	3
F	22	castaño	168	soltero	0
M	34	castaño	182	soltero	0
M	34	castaño	178	soltero	1
M	30	castaño	176	casado	2
F	48	castaño	167	casado	3
F	26	castaño	172	casado	1
F	29	castaño	170	casado	1
M	33	azul	181	casado	2
M	46	azul	185	casado	1
M	44	verde	168	casado	2
F	40	castaño	166	casado	2
F	38	verde	172	casado	1

Solicitar el siguiente:

a) identificar la población en estudio;
b) identificar la muestra e indicar su dimensión;
c) identificar y clasificar cada uno de los atributos en juego;
d) organizar los datos para el atributo “sexo” e identificar la moda;
e) organizar los datos para el atributo “color de los ojos” e identificar la moda;
f) organizar los datos para el atributo “estado civil” e identificar la moda;
g) organizar los datos para el atributo “número de hijos”, e identificar la moda y determinar la media;
h) organizar los datos para el atributo “edad”, e identificar la moda y determinar la media;

AP.3.2 – Teniendo presente la tabla anterior, para los atributos “edad” y “número de hijos”, determinar la mediana y los cuartiles.

AP.3.3 – Teniendo presente la tabla anterior, para los atributos “sexo” y “color de los ojos” construir diagramas de barras y diagramas circulares, utilizando el multiplano y pins con etiquetas en braille

AP.3.4 – Teniendo presente la tabla anterior, para los atributos “edad” y “número de hijos” construir el correspondiente diagrama de extremos y cuartiles, utilizando el multiplano y pins con etiquetas en braille.

AP.3.5 – Para el atributo “altura”, referido en la tabla anterior, el profesor presentará, en papel térmico, un histograma de frecuencias relativas, con el correspondiente polígono de frecuencias, ambos en relieve, con etiquetas en braille, y solicitará la identificación de la clase modal y de la clase mediana.

AP.3.6 - Para el atributo “altura”, referido en la tabla anterior, el profesor presentará, en papel térmico, un histograma de frecuencias relativas cumuladas, con la correspondiente función cumulativa, ambos en relieve, con etiquetas en braille, y solicitará la identificación de percentiles que se queden en extremos o en puntos medios de una clase.

AP.3.7 – Solicitar a los alumnos, para la experiencia aleatoria que consiste en el lanzamiento de un dado equilibrado con forma de un cubo y en mirar el número de marcas de la cara que queda hacia arriba, que indiquen el espacio de resultados así como ejemplos de los más variados tipos de eventos.

AP.3.8 – Solicitar a los alumnos que determinen el número de modos distintos en cómo se pueden disponer alrededor de la tabla de trabajo

AP.3.9 – Indicar a los alumnos el número de ciudadanos españoles y franceses y solicitar cuál la probabilidad de, que en una selección aleatoria, sea seleccionado uno(a) ciudadano(a) previamente escogida por nosotros.

AP.3.10 – Solicitar a los alumnos que determinen el número de apuestas distintas que en euromillones contempla y que comparen la probabilidad de tener éxito en una apuesta concreta con la probabilidad relativa al ejercicio anterior.

7.2.7 - Metodología de trabajo

El profesor deberá seguir una metodología en que las clases, esencialmente, tendrán un cariz teórico-práctico. Así, por cada concepto impartido, deberán ser evidenciadas aplicaciones prácticas del mismo, presentados aspectos históricos relacionados con el concepto referido, y siempre entender adecuadamente, su etimología, presentados algunos ejercicios resueltos y propuestos ejercicios para resolución, pudiendo ser hechos de forma individual o en pequeños grupos.

El profesor deberá tener siempre atención en que el aprendizaje se haga pasito a pasito, por lo que deberá preocuparse de que los alumnos tengan dominio sobre los conceptos indispensables para el aprendizaje de un nuevo concepto.

Es natural que cada formando de la APEDV, atendiendo a sus especificidades, progrese de acuerdo con su propio ritmo, por lo que el profesor deberá estar muy atento a los avances de cada uno de ellos y estimular con nuevas estrategias y/o metodologías cuando los avances no sean los previstos.

En cada tema deberán ser elaborados textos de apoyo que, siempre que sea posible, estarán disponibles a los alumnos antes de que el tema vaya a ser explicado. De este modo, podrá ser estimulada en los alumnos su curiosidad para que puedan, por su libre voluntad, investigar sobre el tema que va a ser impartido, teniendo, por tanto, en este ámbito, toda la ventaja de que cada texto de apoyo tenga, en su parte inicial, un índice y/o un resumen del contenido.

Durante el aprendizaje es importante que los alumnos se queden siempre en una posición cómoda, por lo que el profesor deberá dar el apoyo necesario para que tal ocurra.

Si en un momento dado un alumno estuviere distraído ello significa que no está interesado, por lo que el docente deberá esforzarse para encontrar las medidas adecuadas para atraer su atención hacia las actividades lectivas.

Por cada ejercicio que solicite a los alumnos, sea en la sala de clase, sea como trabajo fuera de la sala de clase, sea, también, en el ámbito de las pruebas escritas, el profesor deberá desarrollar los esfuerzos necesarios para asegurarse de que todos los alumnos se queden, siempre, con el conocimiento de la respectiva resolución.

En lo que respecta al estudio de las funciones, a lo largo de mi carrera profesional, tengo experimentado, como uno de los ejemplos, ya referido en el desarrollo de un currículo de nivel D, señalar que es posible establecer una correspondencia entre un conjunto de monedas de 50 céntimos y el conjunto de piruletas (o algo semejante) existentes en una máquina automática y que, en condiciones normales, esa correspondencia es una función, pues a cada moneda introducida corresponde una piruleta. Como refuerzo, señalo también, que en situaciones anómalas de funcionamiento de la máquina, la referida correspondencia, ya no es una función. Así ocurre cuando se introduce una moneda y no sale piruleta (situación perjudicial para el cliente) o cuando se introduce una moneda y la máquina proporciona más de una piruleta (situación perjudicial para el comerciante).

También, como otros ejemplos de funciones, en la vida real, pueden ser referidos, entre otros, los siguientes:

- la cantidad de gasolina y el respectivo costo,
- el tiempo de una llamada telefónica y el respectivo costo,
- la renta anual de una persona física y el impuesto que es cobrado por el Estado (IRS) y señalar que esto es un ejemplo de una función definida por ramas siendo cada una de las ramas una restricción de una función afín;
- la ley que rige un cuerpo sujeto a la acción de la gravedad que es traducida por una función cuadrática.

En cuanto al estudio de las funciones afines, y al ser referido el parámetro que traduce la inclinación de la recta que representa el gráfico de la función, señalar que la inclinación se relaciona con el desplazamiento vertical o con el desplazamiento horizontal, cuando en la recta se pasa, de un punto a otro. Referir, también, que existen señales de tráfico, relativas a subidas íngrimas (o pronunciadas) indicando cada uno de ellos, un valor porcentual, por ejemplo 12%, que indica que cuando hay un desnivel en la subida (decida), por cada 100 metros recorridos en la horizontal se subió (se descendió) 12 metros en la vertical, lo que equivale, por ejemplo, a la altura de un inmueble con 3 pisos.

También, en lo que respecta al declive, el docente podrá presentar un mecanismo constituido por dos piezas metálicas perpendiculares entre sí, en las cuales fueron realizados orificios equidistantes, a partir del punto de encuentro de las piezas. El profesor al colocar una extremidad de una paja (o de un alambre apropiado) en uno de los orificios de la pieza horizontal y hacer pasar la otra extremidad por otro orificio, pero la pieza vertical, podrá preguntar a los alumnos sobre cuál es la inclinación de la pajita. La figura siguiente, muestra un esquema de este dispositivo en el cual la pajita presenta una inclinación de 3/6, o sea, de un 50%.

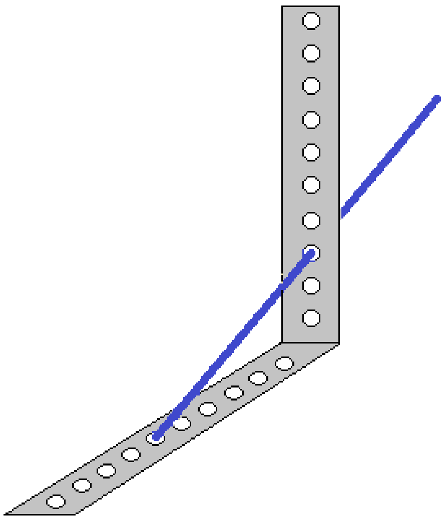


Figura 7.2.7-01: Dispositivo para la enseñanza de la noción de pendiente de una recta

El profesor podrá utilizar este mecanismo para, a partir de la pajita colocada en la posición horizontal, en que el declive es 0, ir aumentándolo hasta que la pajita quede en posición vertical. Podrá entonces aquí, introducir la noción de infinito.

También, en lo que respecta al estudio de las funciones, podrá ser referido que existen ciertos fenómenos que son modelados por funciones afines (o restricciones de funciones afines) que permiten hacer previsiones en lo relativo a esos fenómenos. Como ejemplo, podrá ser presentada la modelación, a través de la función $y=30,4x-200,2$ del número de campistas, en un campamento, cuando la temperatura máxima diaria es un valor que oscila entre los 20 y los 40 grados Celsius. En este contexto, podrá solicitar a los alumnos que determinen una estimativa para el número de campistas en el campamento en un día en que la temperatura máxima prevista sea, por ejemplo, de 28 grados. Resaltar que el valor obtenido debe ser, cuando así se justifique, redondeado al número entero más cercano.

En el ámbito de la Geometría será interesante solicitar a los alumnos que, en el estudio de los sólidos geométricos, a partir de planificaciones de sólidos hechos en papel adecuado, procedan al montaje de los mismos. También, en este módulo, el profesor podrá utilizar software propio, como, por ejemplo, el Geometer´ Sketchpad, para evidenciar a los alumnos de baja visión, de forma interactiva, las potencialidades de este recurso tecnológico. Mientras, debe tener la preocupación de hacer, al mismo tiempo, para los alumnos ciegos, una audio descripción tan completa cuanto sea posible de todo lo que fuera a ocurrir. Señálese, también, que la situación ideal ocurrirá cuando los alumnos ciegos puedan manejar una placa táctil donde puedan “mirar” las figuras que sus compañeros contemplan en la pantalla.

Al final de este módulo, y a semejanza de lo que fue llevado a efecto en la parte práctica de la investigación, podrá ser presentado un proyecto, por ejemplo, un presupuesto de una vivienda unifamiliar, en lo cual los alumnos, en determinadas fases, tengan una participación individual que extraiga resultados que irán a ser utilizados, por todos, para conclusión del proyecto.

Dado que la presente asignatura se destina, bien al curso de recepcionistas-telefonistas, bien al de masajistas-fisioterapeutas de la APEDV, los ejercicios, especialmente los referentes al Módulo de la Introducción a la Estadística, deberán tener en cuenta el contexto profesional inherente a cada una de las situaciones. Así, en la elaboración de ejercicios, en lo que se refiere al curso de recepcionista/telefonista se ha de explorar variables estadísticas relativas, por ejemplo, el número de clientes, origen de los clientes (nacionales, extranjeros), género de los clientes, edad de los clientes, días de estancia, precio de las habitaciones, número de llamadas telefónicas, destino/origen de las llamadas telefónicas (locales, regionales, internacionales), duración de las llamadas, entre otros, y, para el curso de masajistas/fisioterapeutas, considerar las variables estadísticas relativas al número de enfermos, género de los enfermos, edad de los enfermos, tipo de patología, duración del tratamiento, costo del tratamiento, entre otros.

Al final de este módulo los alumnos podrán realizar un proyecto, en equipo, en el que en una fase participarán, o individualmente o e grupos de dos, y en una fase posterior, utilizando los datos ya obtenidos, para conclusión del trabajo, intervendrá el grupo. Para este proyecto podrían utilizar, por ejemplo, los datos que la *Agência Nacional Para a Qualificação e o Ensino Profissional* (ANQEP)[170] pone a disposición de los alumnos de la APEDV, relativos a los Cursos Profesionales y a los Cursos de Educación y Formación (CEF) de Nivel 2 (Tipos 2, 3, e 4), contenidos en las tablas siguientes:

1. Cursos Profesionales

Município	NUT III	NUT II	Curso	Nº de alumnos matriculados en el 1º año del curso			
				2011-2012	2012-2013	2013-2014	2014-2015

2. Cursos de Educación y Formación (CEF) de Nivel 2 (Tipos 2, 3, e 4)

[170] A través de su Presidente, Profesor Gonçalo Xufre Silva, y como con secuencia de una reunión que con él tuve en 14 de Noviembre de 2014.

Município	NUT III	NUT II	Curso	Tipo	Nº de alumnos matriculados en el 1º año del curso			
					2011-2012	2012-2013	2013-2014	2014-2015

En lo que se refiere al cálculo combinatorio, y teniendo en cuenta el tema de Introducción a la Teoría de las Probabilidades, podrán sugerirse dos ejercicios del tipo que se describe.

- ¿De cuántos modos diferentes pueden los alumnos distribuirse alrededor de la mesa de trabajo?

- Admitiendo que, por ejemplo, son 6 los alumnos del grupo¿de cuántas maneras diferentes pueden los alumnos distribuirse para formar 3 grupos con dos elementos cada uno? ¿Siendo los grupos escogidos de forma aleatoria, cuál es la probabilidad de que los alumnos A y B integren el mismo grupo?

- ¿Cuántas apuestas diferentes pueden ser hechas en el ámbito del euromillones? ¿Cuál la probabilidad de éxito de dar con la llave cuando se rellena uno boletín con una única apuesta?

Por supuesto, en lo que respecta al tema en cuestión, podrán explorarse las potencialidades que el material Cuisenaire contempla.

7.2.8. - Organización y tiempos necesarios para desarrollar el programa.

El currículo, tal como ya fue indicado, es parta ser enseñado durante uno año escolar, contemplando 42 semanas, con una carga horaria semanal de 3 horas, teniendo como objetivos generales los que fueron referidos en la sección 7.2.3, debiendo cada uno de los tres módulos ser impartido, al menos, durante 14 semanas, incluyendo las evaluaciones.

El primer módulo para ser impartido es el módulo intitulado “algunos conceptos fundamentales”, después el módulo relativo a la geometría y, por fin, el módulo relativo a la introducción a la estadística e introducción a la teoría de probabilidades.

.

Señálese, también, que para no cansar los alumnos, la carga semanal de 3 horas deberá ser distribuida en dos clases con duración de hora y media cada una de ellas, e impartida en días alternos.

7.2.9 - Recursos didácticos

Para la toma de apuntes y/o de la resolución de problemas, en vez de las máquinas Perkins es deseable que cada alumno ciego posea un computador portátil provisto de un sintetizador de voz y, opcionalmente, de una línea braille

En el primer módulo podrán ser utilizados:

- material Cuisenaire;
- kit de diseño ONCE:
- papel cebolla;
- un conjunto de figuras, en papel térmico, relativas a la representación de correspondencias entre dos conjuntos, con gráficos de funciones afines, con gráficos de funciones definidas por ramas, con gráficos de funciones cuadráticas:
- el dispositivo mostrado en la figura 7.2.4-01 para la explicación del concepto de desnivel.

En la geometría podrán ser utilizados:

- un conjunto de figuras en papel térmico relativas a la representación de puntos, segmentos de recta, rectas, semirrectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, rectas oblicuas, proyección ortogonal de un ponto sobre una recta, ángulos convexos, ángulos cóncavos, ángulo nulo, ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo llano, ángulos adyacentes, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, sistema de dos rectas intersectadas por una secante, diversos tipos de triángulos, el ortocentro de un triángulo, el incentro de un triángulo, el circumcentro de un triángulo, diferentes tipos de cuadriláteros, pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular, octógono regular;

- kit de dibujo ONCE;
- hojas de papel cebolla;
- placa de corcho, pins, gomillas;
- tapa de la mesa de trabajo;
- regla articulada;
- regla graduada con marcas en relieve;
- pajitas;
- lápices;
- transportador con graduaciones en relieve;
- colección de triángulos en cartulina;
- colección de cuadriláteros en cartulina;
- el multiplano;
- reloj didáctico;
- dados con caras en relieve;
- cajas de cerillas;
- tarjetas de cajero automático;
- anillos;
- CD´s insertados en las respectivas portadas;
- objetos circulares de diversas dimensiones;
- cuerda adecuada que pueda ajustarse al perímetro de los objetos; circulares,
- vasos de plástico;
- escuadras;
- un cometa de papel;
- cuerda de trece nudos;
- rompecabezas de Perigal para evidenciar el Teorema de Pitágoras;
- rompecabezas de Dudeney para evidenciar la cuadratura del triángulo equilátero;

- triángulo en cartulina, o en madera, unido a un hilo colocado en su centro de gravedad;
- triángulo en cartulina, o en madera, unido a un hilo colocado en un punto que no sea su centro de gravedad;
- esquema metálico para evidenciar el paralelogramo de Varignon;
- conjunto de sólidos en acrílico;
- embalajes de medicamentos;
- cartón de leche de uno litro con forma paralelepipédica;
- un tambor de niño;
- una cazuela y/o uno cazo cilíndrico;
- pin de señalización;
- balón de ping pong, balón de tenis de mesa, balón de futbol.
- pistola Dymo;
- Geometer´s SketchPad.

En lo que se refiere al módulo Introducción a la Estadística Descriptiva y a la Teoría de las Probabilidades

- representaciones, en papel térmico, de diagramas de barras, diagramas circulares, histogramas, polígonos de frecuencias, funciones cumulativas y diagramas de extremos y cuartiles;
- hojas de papel cebolla;
- base de goma donde asentar las hojas;
- además de la placa rectangular del multiplano que posibilita la construcción de diagramas de barras y de histogramas, y de la palca circular que permite la elaboración de diagramas circulares; el profesor podrá mandar construir una colección de sectores circulares en distintos materiales (por ejemplo, caucho, madera, metal, cartón, acrílico) y de tal modo que los sectores circulares tengan igual radio (por ejemplo, 10 centímetros) y de amplitudes, en grados, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 172 y 180. De este modo el profesor podrá concebir ejercicios donde solicite la construcción de diagramas circulares relativos a variables estadísticas cuyos valores, agrupados por categorías, contemplasen hasta tantas categorías cuantos diferentes tipos de

materiales que la colección presente y evidenciando, naturalmente, cada categoría una frecuencia relativa de acuerdo con las amplitudes de los sectores circulares de la colección, o sea, valores que se traducirían por 5%, 10%, 15%, 20%, 25%, 30%, 35%, 40%, 45% y 50%;

- una calculadora parlante contemplando funciones de Estadística y de Probabilidades;
- software que contemple procesamientos propios de la Estadística, como, por ejemplo, el Excel;
- dados con las caras marcas en relieve;
- representaciones en papel térmico de espacios de resultados de experiencias aleatorias así como de eventos relativos a las mismas;
- una colección de objetos con formas diferentes, por ejemplo: círculos, triángulos, cuadrados, pudiendo cada una de las formas ser construida con materiales diferentes;
- material Cuisenaire.

.

7.2.10 - Evaluación

Atendiendo a la especificidad de los alumnos que frecuentan la APEDV el profesor de Matemáticas, con la previa autorización de la Dirección Pedagógica de esta institución, podrá llevar a cabo entrevistas individuales, en sustitución de un test de diagnóstico, de modo que pueda tener una primera noción del nivel de conocimientos que cada alumno tiene.

Como, por norma, el número de alumnos por grupo es reducido, la evaluación podría perfectamente asentarse en la observación del trabajo desarrollado en las aulas y en la calidad de los ejercicios realizados en casa, por lo tanto se trataría de una evaluación, esencialmente, formativa. Sin embargo, como existe siempre la hipótesis de que, en el decurso de sus vidas, por motivos académicos y/o profesionales, los alumnos puedan tener la necesidad de presentar pruebas públicas, pienso que es adecuado que la asignatura contemple, también, una componente de evaluación acumulativa, que se traduciría por la realización de tres pruebas escritas, cada una al final de cada módulo, para prepararlos a una eventualidad.

La clasificación final en la disciplina podrá obtenerse así:

- o de la observación del trabajo hecho en las aulas y de la resolución de los ejercicios escritos fuera de la sala de clase;

- o, de una media ponderada en que la observación del trabajo hecho en las aulas y la resolución de los ejercicios escritos hechos fuera de la sala de clase constituye una de las componentes con un baremo del 75% y las pruebas escritas, en su conjunto, forman una segunda componente con un baremo del 25%.

El profesor, al inicio del año lectivo, y al presentar a los alumnos las reglas de evaluación, que no prescinda de la realización de las pruebas escritas, podrá, inclusive, definir que la calificación final será la que resulte de la modalidad más favorable al alumno.

En las subsecciones siguientes presento los indicadores de calidad para la evaluación inherentes a este currículo.

7.2.10.1 - Indicadores de calidad para evaluación relativos al Bloque 1, Algunos Conceptos Fundamentales

Relativos al tema “Conjuntos”.

1) saber que uno de los sinónimos del término “conjunto” es el término “colección”;
2) reconocer si un elemento dado pertenece, o no, a un conjunto dado;
3) clasificar un conjunto en vacío o en no vacío;
4) dado un conjunto reconocer si es, o no, singular;
5) saber que un conjunto admite varias formas de representación;
6) reconocer si un conjunto está, o no, incluido en otro conjunto;

7) reconocer si un conjunto contiene, o no, otro conjunto;
8) definir subconjunto de un conjunto dado;
9) justificar por qué es que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto;
10) determinar la reunión de dos conjuntos;
11) determinar la intersección de dos conjuntos;
12) reconocer si dos conjuntos son, o no, disjuntos;
13) determinar el conjunto complementario de un conjunto dado.

Relativos al tema “De los números naturales a los números reales”

14) reconocer si un número dado es, o no, un número natural;
15) determinar, mentalmente, el producto de dos números naturales menores de 10;
16) determinar, mentalmente, el producto de un número natural por 10, 100, o 1000;
17) determinar, mentalmente, el cociente de un número natural por 10, 100 o 1000;
18) determinar la suma (diferencia) de dos números enteros relativos;
19) determinar el producto de dos números enteros relativos,
20) determinar el cociente exacto de dos números enteros relativos;
21) determinar la suma (diferencia) de dos números fraccionarios;
22) determinar el producto (cociente) de dos números fraccionarios;
23) reconocer si un número racional es entero o es fraccionario;
24) reconocer que un número racional tiene una representación decimal finita o infinita, pero periódica;
25) reconocer que un número irracional tiene representación decimal infinita no periódica.
26) resolver problemas donde intervengan las operaciones aritméticas;
27) resolver problemas donde intervengan porcentajes.

Relativos al tema “Cuestiones de Lenguaje”.

28) saber que una expresión es una secuencia de símbolos;

29) reconocer si una expresión tiene o no significado;

30) clasificar[171] una expresión en “expresión sin variables” o en “expresión con variables”;

31) reconocer si una expresión sin variables es, o no, una designación;

32) distinguir, en una expresión sin variables, entre designación y proposición;

33) distinguir entre designación y designado;

34) reconocer si dos designaciones son, o no, equivalentes;

35) reconocer si una expresión sin variables es, o no, una proposición;

36) clasificar una proposición en verdadera o en falsa;

37) saber que una proposición no puede ser simultáneamente verdadera y falsa;

38) identificar, en una expresión con variables, el dominio de cada una de las variables;

39) reconocer si una expresión con variables es, o no, una expresión designatoria;

40) reconocer si una expresión con variables es, o no, una expresión proposicional (o condición);

42) dada una condición con una solo variable, reconocer si un valor dado es, o no, solución de la condición;

43) dada una condición con dos variables, reconocer si un dado par ordenado de valores es, o no, solución de la condición;

44) clasificar una condición en posible o en imposible;

45) clasificar una condición posible en determinada o en indeterminada.

Relativos al tema “Monomios y polinomios”:

46) identificar el coeficiente de un monomio;

47) identificar la parte literal de un monomio;

48) identificar el grado de un monomio;

49) reconocer si dos monomios son, o no, semejantes;

50) calcular la suma (diferencia) de dos monomios semejantes;

51) calcular el producto de un monomio por un número;

[171] Se trata, solamente, expresiones con significado y en las cuales no intervienen cuantificadores

52) calcular el producto de dos monomios;
53) determinar el valor que se obtiene cuando, en un monomio, se concretizan las variables;
54) identificar los monomios que componen un polinomio;
55) identificar el grado de un polinomio;
56) saber multiplicar un polinomio por un monomio;
57) determinar el valor que se obtiene cuando, en un polinomio, se concretizan las variables;

Relativos al tema “Ecuaciones algebraicas”:

58) verificar si un valor dado es, o no, solución de una ecuación de 1er. grado con una incógnita;
59) determinar el conjunto solución de una ecuación de 1er. grado;
60) clasificar una ecuación de 1er. grado con una incógnita en posible o imposible;
61) verificar si un valor dado es, o no, solución de una ecuación de 2º grado con una incógnita;
62) determinar el conjunto solución de una ecuación del 2º grado;
63) clasificar una ecuación del 2º grado con una incógnita en posible o imposible;
64) verificar si un dado par ordenado es, o no, solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas;
65) resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas;
66) clasificar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en posible o en imposible y, si es posible, en determinado o en indeterminado.

Relativos al tema “Representación de puntos en uno plano cartesiano”:

67) saber que en un sistema de dos ejes cartesianos el eje horizontal se denomina eje de las abscisas y que el eje vertical se designa eje de ordenadas;
68) saber que las abscisas y las ordenadas tienen la designación común de coordenadas, y que las abscisas son las primeras coordenadas y las ordenadas las segundas coordenadas;

69) reconocer que un sistema de dos ejes cartesianos divide el plano en cuatro cuadrantes;
70) identificar cada uno de los cuatro cuadrantes;
71) identificar las coordenadas de un punto dado en un plano cartesiano;
72) identificar un punto en un plano cartesiano dado.

Relativos al tema "Funciones":

73) reconocer si una correspondencia entre dos conjuntos es, o no, unívoca",
74) saber que una correspondencia unívoca también se designa por "función", "aplicación", o "transformación";
75) saber que en una función hay tres componentes fundamentales a tener en cuenta: el conjunto de partida, el conjunto de llegada y el mecanismo o proceso que, de forma clara, asocia a cada elemento del conjunto de partida uno y uno solamente del conjunto de llegada;
76) identificar el dominio y el contradominio de una función;
77) saber que, en una función, el mecanismo de obtención de las imágenes puede ser representado a través de un diagrama sagital, de una tabla o de una expresión designatoria;
78) reconocer si un objeto dado es, o no, cero de una función;
79) reconocer si una función dada es, o no, una restricción de otra función;
80) reconocer si una función dada es o no una extensión de otra función;
81) representar puntos en un plano cartesiano;
82) representar gráficamente una función afín;
83) saber cuál es la interpretación geométrica de cada uno de los parámetros de una función afín representada en la forma canónica;
84) reconocer que una función lineal es una función afín con ordenada nula en el origen;
85) representar gráficamente restricciones de una función afín;
86) representar gráficamente una función definida por ramas en que cada una de las ramas es una restricción de una función afín;
87) determinar, caso de que existan, los ceros de una función cuadrática;
88) representar gráficamente una función cuadrática;

89) saber cuál es la interpretación geométrica de cada uno de los parámetros de una función cuadrática representada en la forma canónica;
90) determinar el eje de simetría y el vértice del gráfico de una función cuadrática;
91) determinar para qué objetos la función cuadrática es positiva;
92) determinar para qué objetos la función cuadrática es negativa;
93) determinar dónde la función cuadrática es creciente y dónde es decreciente y dónde tiene el máximo (o el mínimo).

7.2.10.2 - Indicadores de calidad para evaluación relativos al Bloque 2, Geometría

1) interpretar el significado de la expresión “Geometría”;
2) reconocer que los elementos fundamentales de la Geometría son el punto, la recta y el plano;
3) reconocer que los puntos no tienen forma ni dimensión teniendo, sin embargo, posición
4) identificar formas de representación de los puntos;
5) saber cómo, usualmente, se designan los puntos;
6) reconocer que dos puntos distintos determinan una y una sola recta;
7) reconocer que una recta no tiene puntos extremos, es decir, no tiene principio ni fin;
8) reconocer las rectas como elementos geométricos con una solo dimensión;
9) identificar formas de representación de las rectas;
10) saber cómo, usualmente, se designan las rectas;
11) reconocer que cualquier punto de una recta divídela en dos partes, una en un sentido dado y la otra en el sentido opuesto;
12) saber que un punto divide una recta en dos semirrectas siendo ese punto el origen de las semirrectas;
13) saber que, en una recta, dos puntos distintos definen un segmento de recta y que tales puntos definen los extremos del segmento de recta;
14) reconocer que una recta y un punto que no pertenezca a ella definen un plano;
15) reconocer que los planos tienen dos dimensiones;

16) identificar formas de representación de los planos;
17) reconocer que tres puntos no colineales definen un plano;
18) conocer las designaciones de algunas de las letras griegas;
19) saber cómo, usualmente, se designan los planos;
20) reconocer que dos rectas distintas pertenecientes al mismo plano son paralelas cuando no tienen puntos en común;
21) reconocer que dos rectas pertenecientes al mismo plano, que no sean paralelas, tienen un punto en común y tienen la denominación de rectas concurrentes;
22) saber cuándo dos rectas concurrentes tienen la denominación de rectas perpendiculares;
23) reconocer que dos semirrectas con el mismo origen dividen el plano en dos regiones cada una de las cuales puede constituye el interior de uno ángulo;
24) reconocer que dos semirrectas con el mismo origen, conjuntamente con una de las regiones en que ellas dividen el plano, constituye un ángulo;
25) saber si una región del plano es, o no, convexa;
26) saber que una región no convexa se denomina cóncava;
27) reconocer que cuando los lados no son colineales una de las regiones es convexa y la otra es cóncava
28) reconocer que el ángulo cóncavo contempla la región cóncava como su interior;
29) reconocer que un ángulo es convexo cuando su interior es una región convexa;
30) saber que cada ángulo tiene asociada una característica muy importante, la amplitud, y cuya medida puede ser expresa en grados, en el sistema sexagesimal;
31) definir lo que es un ángulo recto;
32) definir lo que es un ángulo grado;
33) definir lo que es un ángulo agudo;
34) definir lo que es un ángulo obtuso;
35) definir lo que es un ángulo giro;
36) definir lo que es un ángulo cóncavo;
37) definir lo que es un ángulo convexo;
38) saber cómo designar un ángulo;

39) definir cuál la utilidad de un transportador;
40) utilizar el transportador en situaciones concretas;
41) definir lo que son ángulos adyacentes;
42) definir lo que son ángulos complementarios;
43) calcular la amplitud de un ángulo complementario de un ángulo dado;
44) definir lo que son ángulos suplementarios;
45) calcular la amplitud de un ángulo suplementario de un ángulo dado;
46) definir lo que es la bisectriz de un ángulo;
47) saber lo que son ángulos geométricamente iguales,
48) saber que los ángulos geométricamente iguales también se dicen congruentes;
49) identificar, en un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante, dos ángulos verticalmente opuestos;
50) identificar, en un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante, dos ángulos correspondientes;
51) identificar, en un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante, dos ángulos alternos internos;
52) identificar, en un sistema de dos rectas paralelas intersectadas por una secante, dos ángulos alternos externos;
53) saber que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados;
54) demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados;
55) definir línea poligonal;
56) definir los vértices y los lados de una línea poligonal;
57) definir longitud de línea poligonal;
58) definir línea poligonal abierta;
59) definir línea poligonal cerrada;
60) definir línea poligonal simple;
61) reconocer que una línea poligonal cerrada y simple divide el plano en dos regiones: una interior y otra exterior;
62) saber que un polígono resulta de la unión de una línea poligonal simple y cerrada, con su región interior;
63) identificar la línea poligonal como la frontera de un polígono;

64) saber que los vértices y los lados de la línea poligonal son, respectivamente, los vértices y los lados del polígono;
65) interpretar el significado de la expresión “polígono”;
66) reconocer si un polígono es o, no, convexo;
67) definir polígono equilátero;
68) definir polígono equiángulo;
69) definir polígono regular;
70) clasificar un polígono con, por lo menos, hasta 8 lados;
71) calcular el perímetro de un polígono a partir del conocimiento de la longitud de cada uno de sus lados;
72) interpretar el significado de la expresión “perímetro”;
73) saber que el área de un rectángulo se calcula multiplicando las longitudes de dos lados no opuestos;
74) saber que, dadas dos regiones disjuntas, el área de la región resultante de su unión, es la suma de las áreas de cada una de las regiones dadas;
75) definir diagonal de un polígono;
76) reconocer que en un triángulo no hay diagonales;
77) reconocer que en un cuadrilátero a cada vértice está asociado una sola diagonal;
78) reconocer que en un pentágono a cada vértice están asociadas 2 diagonales;
79) clasificar los triángulos en cuanto a los ángulos;
80) clasificar los triángulos en cuanto a los lados;
81) determinar la amplitud de uno de los ángulos internos siendo conocidos los otros dos;
82) determinar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta;
83) identificar la altura de un triángulo relativa a un lado dado del mismo;
84) calcular el área de un triángulo a partir del conocimiento de una base y de la respectiva altura;
85) determinar las medianas de un triángulo;
86) determinar el centro de gravedad de un triángulo;
87) definir mediatriz de un segmento de recta;
88) determinar el circumcentro de un triángulo;
89) determinar el incentro de un triángulo;

90) enunciar el Teorema de Pitágoras;
91) calcular, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa siendo dados los catetos;
92) calcular, en un triángulo rectángulo, un cateto siendo dados la hipotenusa y el otro cateto;
93) reconocer si tres números naturales son, o no, un terno pitagórico;
94) verificar si, dados las longitudes de tres segmentos de recta, es posible o no, con ellos, construir un triángulo;
95) clasificar un triángulo, en cuanto a los ángulos, a partir del conocimiento de las longitudes de sus lados;
96) clasificar un cuadrilátero en paralelogramo, en trapecio o en trapezoide dependiendo de, respectivamente, tener dos pares de lados paralelos, tener un par de lados paralelos o no tener lados paralelos.
97) clasificar un paralelogramo, con los ángulos internos rectos, en cuadrado o en rectángulo dependiendo, respectivamente, que tenga, o no, todos los lados iguales;
98) clasificar un paralelogramo, con los ángulos internos no rectos, en losange o en paralelogramo propiamente dicho, de acuerdo, respectivamente, que tenga, o no, los lados todos iguales;
99) reconocer si un trapecio es, o no, un trapecio rectángulo;
100) reconocer si un trapecio es, o no, un trapecio isósceles;
101) reconocer si un trapecio es, o no, un trapecio oblicuángulo;
102) reconocer si un trapezoide es, o no, una cometa;
103) determinar el largo (la anchura) de un rectángulo siendo conocidos el área y la anchura (el largo);
104) determinar el largo y la anchura de un rectángulo siendo conocidos el área y el perímetro;
105) determinar el área (lado) de un cuadrado siendo conocido el lado (área);
106) determinar el área (perímetro) de un cuadrado siendo conocido el perímetro (área);
107) construir el paralelogramo de Varignon relativo a un cuadrilátero cualquiera dado;
108) calcular el área de un paralelogramo;
109) calcular el área de un losange;
110) calcular el área de un trapecio;

111) demostrar que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360 grados;
112) resolver ejercicios con los ángulos internos;
113) calcular el perímetro de una circunferencia;
114) calcular el área de un círculo;
115) reconocer si un sólido es o no un poliedro;
116) reconocer si un poliedro es o no un cubo
117) calcular el área de una cara, lateral y total de un cubo;
118) calcular el volumen de un cubo;
119) reconocer si un poliedro es o no un prisma (cuadrangular, recto);
120) identificar el número de vértices y de aristas de un prisma cuadrangular;
121) calcular áreas de la base, lateral y total del prisma (cuadrangular, recto) así como su volumen;
122) reconocer si un poliedro es o no un prisma (triangular, recto);
123) identificar el número de vértices y de aristas de un prisma triangular;
124) calcular las áreas de la base, lateral y total del prisma (triangular, recto) así como el volumen;
125) reconocer si un poliedro es o no una pirámide (cuadrangular, recto);
126) identificar el número de vértices y de aristas de una pirámide cuadrangular;
127) calcular las áreas de la base, lateral y total de la pirámide (cuadrangular, recto) así como el volumen;
128) reconocer si un poliedro es o no una pirámide (triangular, recto);
129) identificar el número de vértices y de aristas de una pirámide triangular;
130) calcular las áreas de la base, lateral y total del prisma (triangular, recto) así como el volumen;
131) identificar si una pirámide triangular es o no un tetraedro;
132) identificar la apotema de la base de un prisma (regular, recto);
133) identificar la apotema de una pirámide;
134) identificar si un sólido geométrico es o no un cilindro;
135) mostrar cómo generar un cilindro recto;
136) calcular, relativamente a un cilindro, el perímetro de la base, el área de la base, lateral y total así como el volumen;
137) identificar si un sólido geométrico es o no un cono;

138) evidenciar cómo generar un cono recto;
139) calcular, relativamente a un cono, el perímetro de la base, el área de la base, lateral y total así como el volumen de un cono;
140) reconocer un sólido geométrico como una esfera;
141) mostrar cómo generar una esfera;
142) calcular, a partir del conocimiento del radio, el área y el volumen de una esfera.

7.2.10.3 - Indicadores de calidad para evaluación relativos al Módulo 3, Introducción a la Estadística y a la Teoría de las Probabilidades

Relativos al tema “Introducción a la Estadística”:

1) reconocer que una muestra es un subconjunto de una población en estudio;
2) reconocer que cada elemento de una muestra es una unidad estadística;
3) saber que la dimensión de una muestra es el número de elementos que la componen;
4) clasificar cada característica en estudio en cualitativa, cuantitativa, discreta o cualitativa continua;
5) reconocer que a cada atributo en estudio está asociado a una entidad matemática denominada variable (estadística);
6) saber que los datos son los valores que una variable estadística toma, a la medida que ella recorre las unidades estadísticas que constituyen la población, o la muestra, en estudio;
7) saber agrupar en categorías los datos de una variable estadística cualitativa o cuantitativa discreta;
8) saber que el número de datos de una categoría constituye la frecuencia absoluta de esa categoría;
9) saber que la suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número total de datos;
10) saber que la frecuencia relativa de una categoría es el valor que se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de datos;
11) saber representar los valores de las frecuencias relativas, sea en la forma fraccionaria, sea decimal, o sea, también, en porcentaje;

12) saber que la suma de todas las frecuencias relativas es 1;
13) identificar la moda como el/lo(s) valor (es) que ocurre (n) más veces;
14) interpretar un diagrama de barras;
15) construir un diagrama de barras;
16) interpretar un diagrama circular;
17) construir un diagrama circular;
18) determinar la media de una secuencia de datos numéricos relativos a una variable estadística cuantitativa discreta;
19) reconocer que para determinar la mediana en una secuencia de datos, relativos a una variable estadística cuantitativa discreta, la secuencia debe estar debidamente ordenada;
20) saber que en una secuencia ordenada de datos numéricos, relativos a una variable estadística cuantitativa discreta, con un número par de valores, la mediana es la media aritmética de los valores que ocupan las posiciones más centrales;
21) saber que en una secuencia ordenada de datos numéricos, relativos a una variable estadística cuantitativa discreta, el 1er. cuartil es la mediana de la secuencia de datos que están situados a la izquierda de la mediana de esa secuencia;
22) saber que en una secuencia ordenada de datos numéricos, relativos a una variable estadística cuantitativa discreta, el 3er. cuartil es la mediana de la secuencia de datos que están situados a derecha de la mediana de esa secuencia;
23) saber que los tres cuartiles dividen una secuencia ordenada de datos numéricos en cuatro subconjuntos con igual número de elementos;
24) reconocer que, en una secuencia ordenada de datos numéricos, por lo menos, un cuarto de los datos tienen valores no superiores al 1er. cuartil; que, por lo menos, la mitad de los datos tienen valores no superiores al 2º cuartil, o mediana, y que, por lo menos, tres cuartos de los datos tienen valores no superiores al 3er. cuartil;
25) saber que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una secuencia de dados numéricos denominase amplitud total;
26) saber que la diferencia entre el 3er. cuartil y el 1er. cuartil se designa por amplitud intercuartil;

27) saber diseñar el diagrama de extremos y cuartiles;
28) conocer los criterios de las potencias de base 2 y de la raíz cuadrada, para determinación de una sugestión para el número k de clases que deben ser consideradas en un conjunto de n datos relativos a una variable estadística cuantitativa continua;
29) saber dividir un determinado intervalo de números reales en k intervalos de igual amplitud;
30) determinar, cuándo del agrupamiento de datos, en clases, relativamente a una variable cuantitativa continua, los extremos y los centros de cada una de las clases;
31) reconocer que el número de datos perteneciente a una cualquier clase es la frecuencia absoluta de esa clase;
32) calcular la frecuencia relativa asociada a una clase conociendo la correspondiente frecuencia absoluta y el número total de datos;
33) calcular la media de un conjunto de datos relativos a una variable estadística cuantitativa continua y agrupados en k clases;
34) identificar las clases modal y mediana;
35) interpretar un histograma de frecuencias absolutas (relativas);
36) diseñar un histograma de frecuencias absolutas (relativas);
37) diseñar el polígono de frecuencias relativas;
38) interpretar un histograma de frecuencias absolutas (relativas) acumuladas;
39) diseñar un histograma de frecuencias absolutas (relativas) acumuladas;
40) interpretar el gráfico de la función acumulativa:
41) diseñar el gráfico de la función acumulativa,
42) identificar la mediana como el valor de la variable donde la función acumulativa contempla el 50% de la frecuencia relativa acumulada;
43) identificar cómo los 1º, 2º, y 3º cuartiles los valores de la variable donde los valores de la función cumulativa son, 25%, 50% y 75%, respectivamente.
44) saber que los deciles son 9, se representan por D1, D2, …, D9 y son valores de la variable estadística donde la frecuencia relativa acumulada es de 10%, 20%, …, 90%, respectivamente;
45) saber que los percentiles son 99, se representan por P1, P2, … , P99 y son valores de la variable estadística donde la frecuencia relativa acumulada es del 1%, 2%, …, 99%, respectivamente;

46) reconocer que la media, la moda, la mediana, los deciles y los percentiles son parámetros de localización;
47) reconocer que la amplitud total y la amplitud intercuartil son parámetros de dispersión;
48) clasificar como simétrica la distribución de los valores de una variable estadística cuantitativa cuando fueron coincidentes los valores de la media, de la moda y de la mediana.

Relativos al tema “Introducción a la Teoría de las Probabilidades”:

49) distinguir entre experiencia determinista y experiencia aleatoria;
50) identificar los resultados que pueden ocurrir en el ámbito de una experiencia aleatoria;
51) saber que el espacio de resultados de una experiencia aleatoria es el conjunto constituido por los resultados que pueden ocurrir en esa experiencia;
52) reconocer que un cualquier conjunto constituido por uno, o más, resultados de una experiencia aleatoria, constituye un evento posible;
53) designar por eventos elementales los que contemplan un único resultado de la experiencia aleatoria;
54) designar por eventos compuestos los que contemplan más de un resultado de la experiencia aleatoria;
55) designar por evento cierto el que contempla todos los resultados de la experiencia aleatoria;
56) designar por evento imposible el que no contempla cualquier resultado de la experiencia aleatoria;
57) interpretar el evento imposible como conjunto vacío;
58) reconocer que un evento es un subconjunto del espacio de resultados;
59) definir como compatibles dos eventos que tienen en común, por lo menos, un resultado de la experiencia aleatoria;
60) definir como incompatibles dos eventos que no tienen en común ningún resultado de la experiencia;
61) definir como complementarios dos eventos que no tienen en común ningun resultado de la experiencia pero que, en su globalidad, contemplan todos los resultados de la experiencia aleatoria;

62) saber que la tasa de éxito de un evento, para n realizaciones de la experiencia, siempre en idénticas circunstancias, teniendo el evento ocurrido k veces, se obtiene dividiendo k por n;
63) reconocer que la tasa de éxito de un evento es un valor comprendido entre 0 y 1;
64) saber que a cada evento A está asociado un número real comprendido entre 0 y 1 que se designa por p(A) y se denomina probabilidad del evento A;
65) saber que la probabilidad del evento cierto es 1;
66) saber que siendo A y B eventos incompatibles entonces el evento que resulta de la reunión de A con B tiene una probabilidad dada por p(A)+p(B);
67) saber que en experiencias aleatorias, con un número finito de resultados posibles, teniendo los eventos elementares igual probabilidad, entonces la probabilidad de un evento se obtiene dividiendo el número de casos favorables al éxito del evento, por el número de casos posibles;
68) enunciar el teorema de la inclusión/exclusión cuando es aplicado a dos eventos;
69) resolver problemas por aplicación del teorema de la inclusión/exclusión;
70) definir factorial de un número natural;
71) aplicar el concepto de factorial para determinar el número de permutaciones distintas que pueden ocurrir en un conjunto con n elementos;
72) distinguir, siendo seleccionados al acaso k elementos de un conjunto con n elementos (con n>=k), entre variaciones y combinaciones;
73) designar por V(n,k) el número de variaciones de n elementos tomados k a k (con n>=k);
74) calcular V(n,k);
75) designar por C(n,k) el número de combinaciones de n elementos tomados k a k, (con n>=k);
76) calcular C(n,k);
77) resolver problemas donde intervengan las permutaciones y/o las variaciones y/o las combinaciones.

7.2.11 - Orientaciones o recomendaciones.

Es deseable que el primer contacto con los alumnos se haga a través de entrevistas individuales, tal como yo lo hice en el presente estudio y tal como ya referí en la sección anterior.

Es, también, muy importante que durante el transcurrir del curso el profesor de matemática tenga, con frecuencia, contactos con la Directora Pedagógica de la APEDV, con el psicólogo y, también, con los otros profesores. En esos contactos, principalmente, con los otros profesores, el docente de matemática podrá informarse sobre la transversalidad de ciertos temas como, por ejemplo, la estadística y las probabilidades, que tanto pueden ser tratados en matemática como en informática. Así, teniendo una cercana cooperación entre los profesores de estas dos asignaturas será posible, por ejemplo, con la utilización del JAWS, que los alumnos puedan explorar adecuadamente las potencialidades del Excel.

Es interesante, también, que el profesor de matemática proponga visitas de estudio a instituciones que, de algún modo, trabajen con asuntos que podrán proporcionar informaciones de gran utilidad para los alumnos y que pueden, incluso, sugerir ejercicios interesantes. Entre tales instituciones, me refiero, a título de ejemplo, el *Instituto Nacional de Estatística* (INE) y la *Agência Nacional Para a Qualificação e o Ensino Profissional* (ANQEP).

7.3 - LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En este subcapítuloindico dos posibles líneas de investigación.

7.3.1 - Primera línea de investigación

En el viaje que hice a Troms, en Noruega, tuve oportunidad de contactar con el Profesor José Artur Vale Serrano que es investigador en el Hospital de esta ciudad y, también, enseña en la Universidad local. En esta ocasión, le hice una descripción muy genérica de la presente tesis y manifesté, también, mi opinión de que sería muy interesante proceder a una investigación relativa a la producción de materiales adecuados a la enseñanza de personas con necesidades visuales, a través de la utilización de impresoras 3D.

El profesor Vale Serrano que es el responsable de diversos proyectos transnacionales relacionados con la concepción de equipamientos para proporcionar mejor calidad de vida a personas mayores, manifestó gran interés en cooperar en la investigación referida.

7.3.2 - Segunda línea de investigación

Sería interesante que, de haber lugar a una asignatura de Matemática en los cursos de la APEDV, existiese la posibilidad de que el profesor pueda utilizar un cuadro interactivo, al mismo tiempo que cada uno de los alumnos pudiese disponer de un computador personal. En este contexto, sería posible el cambio y parcelación de la información entre los diversos equipamientos, y de aquí se desprendería, naturalmente, la posibilidad de investigar Estrategias y Metodologías Dinamizadoras del Aprendizaje a Alumnos con Necesidades Visuales, en la Enseñanza de la Matemática, utilizando cuadros interactivos.

8 - REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHARONI, R. (2007) - *Aritmética para pais*. Lisboa: SPM/Gradiva.

AINSCOW, Mell (1995) - *Educação para Todos: Torná-la uma Realidade*. Lisboa: Edições: Instituto de Inovação Educacional.

AINSCOW, Mell; PORTER, G.; WANG. (1997) - *Caminhos para as Escolas Inclusivas*. Lisboa: Edições: Instituto de Inovação Educacional.

Ainscow, Mell. (2000) - *The next step for special education: supporting the development of inclusive pratice*s. In British Journal of Special Education, 27 (2), 76-80.

ALBARELLO, Luc [et al] (1997) – *Práticas e Métodos de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

ALBUQUERQUE, Carlos [et al] (2006) – *A Matemática na Formação Inicial de Professores*. Lisboa: APM.

ALPUIM, T. (2008) - *Probabilidade, Apontamentos de Apoio à disciplina de Probabilidade da Licenciatura em Matemática e Matemática Aplicada*. Lisboa: FCUL.

ALPUIM, T. (2012) - *Estatística, Apontamentos de Apoio à disciplina de Estatística da Licenciatura em Matemática e Matemática Aplicada*. Lisboa: FCUL.

ALSINA, C. [et al] (1988) – *Materiales para Construir la Geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

AMORIM, Diogo Pacheco de (1943) – *Compêndio de Geometria*. Coimbra: Coimbra Editora.

ANTARQ (2013) – *Soluciones con Tecnología de Punta*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.antarq.com.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=81&Itemid=49>, accedido en 17 de enero de 2013.

APEDV (2000) - *Associação Promotora de Emprego de Deficientes Visuais*: *O que é.* [En línea]. Lisboa: APEDV. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.apedv.rcts.pt/>, accedido en 5 de marzo de 2014.

ARCA PROGETTI (coordenador) (2002) - Project LAMBDA: Matemática para estudantes cegos. [En línea]. Italia: Verona. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: www.lambdaproject.org >, accedido en 12 de febrero de 2012.

ARRUDA, José Eduardo Gaspar (2004) – *Associativismo Tiflológico: Paradigmas e Conquistas. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/ Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

ASSEMBLEIA LEGISLATIVA REGIONAL DOS AÇORES (2000) - *Resolução nº 10/A* (29 de Março). Recomenda ao Governo Regional dos Açores que defina um plano para implementação de Educação Especial naquela região autónoma.

ASSEMBLEIA DA REPÚBLICA PORTUGUESA (1989) - *Lei 9: Lei de Bases da Prevenção e da Reabilitação e Integração das Pessoas com Deficiência.* D.R. nº 100, I série (02 de Maio). Pp. 1796-1806. Tem por finalidade a promoção dos direitos, tal como estão consagrados na Constituição da Republica, nas vertentes da prevenção, do tratamento e da reabilitação de modo a garantir igualdade de oportunidades das pessoas deficientes relativamente aos demais concidadãos. Foi revogada pela lei nº 38/2004.

ASSEMBLEIA DA REPÚBLICA PORTUGUESA (2004) *- Lei 38: Bases Gerais do Regime Jurídico da Prevenção, Habilitação, Reabilitação e Participação da*

Pessoa com Deficiência. D.R. nº 194, I Série-A (18 de Agosto). Define as bases gerais do regime jurídico da prevenção, habilitação, reabilitação e participação da pessoa com deficiência

ASSEMBLEIA NACIONAL DE PORTUGAL (1971) - *Lei nº 6: Primeira Lei de Bases da Reabilitação* (08 de Novembro). Estabelece a integração os alunos portadores de uma qualquer deficiência, incluindo naturalmente a deficiência visual, em estabelecimentos de ensino oficial conjuntamente com os demais. Foi revogada pela Lei nº 9/89 e esta, por sua vez, foi revogada pela Lei nº 38/2004.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (1988) - *Renovação do currículo da Matemática*. Lisboa. APM.

ASSOCIAÇÃO DOS CEGOS E AMBLÍOPES DE PORTUGAL (2004) – *Página Principal.* [En línea]. Lisboa: ACAPO. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.acapo.pt>, accedido en 12 de julio de 2012.

ATARAXIA (2012 a) – *Material Escolar.* [En línea]. Lisboa: ATARAXIA. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.ataraxia.pt/matescolar.php>, accedido en 12 de agosto de 2012.

ATARAXIA (2012) – *Página Principal.* [En línea]. Lisboa: ATARAXIA. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.ataraxia.pt/poet_compact.php >, accedido en 7 de agosto de 2012.

BACKMAN, O. & INDE, K. (1988) – *El Adiestramiento de la Visión Subnormal*. Madrid: ONCE.

BAIXAULI CAMILLERI, Elena & ALEGRÍA EZQUERRA, Miguel Ángel (2004) - *Tecnologías y herramientas tecnológicas favorecedoras de la integración laboral y el desarrollo de actividades productivas*. In GRAU SABATÉ, Xavier (coordinador) - *Tecnología y discapacidad visual. Necesidades tecnológicas y aplicación en la vida diaria de las personas con ceguera y deficiencia visual.*

[En línea]. Madrid: ONCE. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.infodisclm.com/documentos/accesibilidad/tecnologia_dvisual/4%20Tercera%20parte.doc>, accedido en 25 de marzo de 2012.

BAPTISTA, José António (2000) – *Braillogia.* [En línea]. Lisboa: Comissão Braille. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.cb.msst.gov.pt/brallologia02.htm>, accedido en 23 de diciembre de 2012.

BAPTISTA, José António Lages Salgado (2000) – *A invenção do Braille e a sua importância na vida dos cegos*. [En línea]. Lisboa: SNRIPD / Comissão Braille. [En línea]. Lisboa: SNRIPD / Comissão Braille. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.gesta.org/braille/braille01.htm>, accedido en 23 de diciembre de 2012.

BARCA, Juan José Della (s/d) - *Notación Matemática Braille*. [En línea]. Universidad de Buenos Aires. ISBN. 950-43-9993-2. Disponible en el sitio <URL: http://mate.dm.uba.ar/~spuddu/della_barca/> , accedido en 1 de octubre de 2012.

BATISTA, C. G. (2005). *Formação de conceitos em crianças cegas: Questões teóricas e implicações educacionais*. Brasília: Psicologia - Teoria e Pesquisa, 21(1), pp. 7-15.

BAUM (2012) - *Poet Compact 2+ The easy to use reading machine*. [En línea]. En INTERNET en el sitio <URL: http://www.baum.de/cms/en/poetcompact2plus/>, accedido en 06 de enero de 2013.

BAUTISTA JIMÈNEZ, Rafael (1993) - *Necessidades Educativas Especiais. Edições Algibe.*

BEIRANTE, João (2008) – *Acessibilidade & Ergonomia: O melhor da Tecnologia ao serviço dos deficientes visuais lusófonos*. Comunicação proferida em «V Congresso Ibero-Americano Sobre Tecnologias de Apoio a Portadores de Deficiência». Vitória, Brasil : Iberdiscap.

BISPO, Regina & MAROCO, João (2005) – *Estatística Aplicada às Ciências Sociais e Humanas*. Lisboa: Climepsi Editores.

BIVAR, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C. (2012) - *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio - 2.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, Direcção Geral da Educação.

BIVAR, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C. (2012) - *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio - 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, Direcção Geral da Educação.

BIVAR, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C. (2013) - *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio - 3.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, Direcção Geral da Educação.

BIVAR, António [et al] (2012) – Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática. [En línea]. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.portugal.gov.pt/media/643611/prop_metas_eb_matematica_vf.pdf>, accedido en 1 de julio de 2012.

BONET BORRÁS, Carmen (2004) – *El Braille y el placer de la lectura: los ciegos queremos seguir leyendo con los dedos.* «Revista Novática». [En línea]. Barcelona: ATI (Julio-Agosto). nº 169, pp. 67-72. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.ati.es/novatica/2004/169/nv169sum.html>, accedido en 25 de abril de 2005.

BORGES, Leonídia [et al] (2005) - *A Corporeidade do Cego. Novos Olhares*. São Paulo; Piracicaba: Memnom; UNIMEP.

BOYER, Carl B. (1999) – *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

BUNGE, Mario (1983) – *La Investigación Científica, su Estrategia y su Filosofía*. Barcelona: Editorial, Ariel S. A.

BURGER, Edward B. & STARBIRD, Michael (2009) – *O Matemático Disfarçado*. Alfragide: Academia do Livro.

BURGOS BORDONAU, Esther (2004) – *Historia de la Enseñanza Musical para ciegos en España: 1830-1938*. Madrid: ONCE.

CALHA, Victor (2004) – *Emprego e Formação Profissional: Direito do Trabalho. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 2.

CALVARIN, Margaret ; MOULFI, Zoubida (2002) - *Louis BRAILLE l' innovateur.* «Livres et Cartables Electroniques pour l'Intégration Scolaire des Jeunes Handicapés Visuels. [En línea]. Paris: Université P.M. Curie. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.snv.jussieu.fr/inova/villette2002/res10.htm>, accedido en 8 de marzo de 2012.

CAMPOS, André Luís Mateus de Oliveira ; BRANCO, Pedro José Gonçalves Branco (2003) – *3GM-INSIGHT: uma interface táctil para introdução de texto num PDA, para utilizadores portadores de deficiência visual*. Relatório de fim de curso. [En línea]. Lisboa: IST, Departamento de Engenharia Mecânica. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://immi.inesc.pt/%7Epjgb/3gm/pt/actividades/relatoriofinal/3gm-relatoriofinal.pdf>, accedido en 31 de enero de 2013.

CARAÇA, Bento de Jesus (1998) – *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva Publicações, Lda.

CARDINET, Jean (1993) – *Avaliar é medir?* Rio Tinto: Edições ASA

CARDOSO, Jorge Rio (2012) – *O Método Ser Bom Aluno "Bora Lá?".* Lisboa: Guerra e Paz, Editores S.A.

CARMO, H.; Ferreira, M. M. (1998) - *Metodologia da Investigação.* Lisboa: Universidade Aberta.

CARVALHO, Rómulo de (1985) – *História do Ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

CASTELO-BRANCO, Miguel (2004) – *Fisiologia da Visão e Visão Artificial. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete Referência Cultural. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 2.

CEIA, Carlos (2003) – *Normas para a Apresentação de Trabalhos Científicos*. 4ª ed. Lisboa: Editorial Presença.

CEITIL, Mário (Organizador) (2006) – *Gestão e Desenvolvimento de Competências*. Lisboa: Edições Sílabo. Pp. 87-118.

CERTIC (2000) – *Acessibilidade.net* . [En línea]. Vila Real: UTAD. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.acessibilidade.net/mecbraille/>, accedido en 31 de enero de 2013.

CERTIC (2002) – *Acessibilidade.net* . [En línea]. Vila Real: UTAD. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.acessibilidade.net/mecbraille/>, accedido en 31 de enero de 2013.

CÉSAR, M. (2003) - *A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos.* IN RODRIGUES, David (2003) - *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à Sociedade.* Porto: Porto Editora. Pp. 117-149.

CODINA BONILLA, Luís (2002) – Información documental e información digital. In LÓPEZ YEPES, José (coordinador) – *Manual de Ciencias de la Información*. Madrid: Ediciones Pirámide. Pp. 301-314.

COELHO, Victor Bordalo (2004) – *Aplicações do Braille à Grafia Científica. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 3.

COLARDYN, D. (1966) – *La Gestión des Competences*. Paris: Presses Universitaires de France.

COMISSÃO BRAILLE (1992) – *Compêndio de Grafia Braille da Língua Portuguesa*. Lisboa: ACAPO.

COMISSÃO BRAILLE (2000) - *Textos Diversos.* [En línea]. Lisboa: CB. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.cb.msst.gov.pt/ra1999.htm>, accedido en 21 de diciembre de 2012.

COMISSÃO BRAILLE (2000a) – *Textos diversos*. [En línea]. Lisboa: CB. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.cb.msst.gov.pt/resolucaodiabraille.htm>, accedido en 10 octubre de 2012.

COMISSÃO DE BRAILLE (2000b) – *Glossário sobre o Braille.* Lisboa: SNRIPD

COMISSÃO DE BRAILLE (2003) – *Grafia Braille para a Informática*. Lisboa: SNRIPD.

COMISSÃO DE BRAILLE (2003a) – *Mãos que Lêem: Testemunhos a Louis Braille*. Prefácio de João Lobo Antunes. Lisboa: Comissão de Braille/Editoral Minerva.

CONWAY, Jonh H. & GUY, Richard K (1999) – *O Livro dos Números*. Lisboa: Gradiva.

CORTESÃO, Luiza (1993) - *A Avaliação Formativa- Que Desafios?.* Colecção Cadernos Pedagógicos. Porto: Edições ASA.

COSTA, Ana Maria Bénard da (2004) – *Do Ensino em Escolas Especiais ao Ensino Integrado Inclusivo. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo sonoro]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, CD nº 1.

COSTA, Ana Maria Bénard da (2006) – *Promoção da Educação Inclusiva em Portugal. Fundamentos e Sugestões.* [En linea]. Aveiro: Universidade de Aveiro. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_45.pdf>, accedido en 06 de diciembre de 2014.

COSTA, M. Lurdes T. (1981) – *Função Social da Avaliação.* In SILVA, Manuela & TAMÉN, Isabel (coordenadoras) (1981) - *Sistema de Ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Lisboa. Pp. 605-622.

COXETER, H.S.M. (1971) - *Fundamentos de geometría*. México: Ed. Limusa.

COXETER, H.S.M. y GREITZER S.L. (1994) - *Retorno a la geometría*. Madrid: Ed. Euler.

CRATO, Nuno (2006) – *Desastre no Ensino da Matemática: como Recuperar o Tempo Perdido.* Lisboa: Gradiva.

CRESPO, A. A. (2009) - *Estatística Fácil*. São Paulo: Saraiva.

CRONBACH, L. (1963): *Course Improvement Trough Evaluation*. Teachers College Record.

CULLATA, R. A. [et al] (2003) - *Fundamentals of special education: What every teacher needs to know (2ª ed.).* New Jersey: Merrill Prentice Hall.

CURY, Augusto (2006) – *Os Segredos do Pai Nosso : A Solidão de Deus*. Rio de Janeiro: Sextante.

D'HAINAUT, L. (1997) – *Conceitos e Métodos da Estatística.* Vol. 1, 2ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

DAMÁSIO, António R. (1995) – *O Erro de Descartes*. Lisboa: Publicações Europa-América.

DE LANSHEERE, G. (1979) – *Dicionnaire de l´évaluation et de la recherche en investigation.* Bruxelles: Labour.

DECO.PROTESTE.PT (2013) - *Impressora 3D: fora do alcance do comum dos mortais*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.deco.proteste.pt/tecnologia/impressoras/noticia/impressora-3d-fora-do-alcance-do-comum-dos-mortais>, accedido en 01 de diciembre de 2013

DELGADO, Maria José [et al] (1988) – *Matematicando Problemas*. Lisboa: Texto Editora.

DESANTES-GUANTER, José María y LOPEZ YEPES, José (2000) - *Teoría y Técnica de la Investigación Científica*. MADRID: Editorial SÍNTESIS, S.A.

DOLPHIN COMPUTER ACCESS (2000) – *Access for virtually impaired.* [En línea]. United Kingdom, Worcester: Dolphin. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www_dolphincomputeraccess_com-products-lunar.htm>, accedido en 25 MAR 2013.

DOLPHIN COMPUTER ACCESS (2002a) – *HAL screen reader, access for visually impaired*. United Kingdom, Worcester : Dolphin.

DOSVOX (2002) – *Os construtores do projecto DOSVOX.* [En línea]. Rio de Janeiro: Universidade Federal. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://intervox.nce.ufrj.br/dosvox/desenvolvedores.htm.>, accedido en 11 MAR 2013.

DOSVOX (2002a) - *Uma breve história do DOSVOX.* [En línea]. Rio de Janeiro: Universidade Federal. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://intervox.nce.ufrj.br/dosvox/historico.htm>, accedido en 11 MAR 2013.

DRUCKER, P. (2000) – *Desafios da Gestão para o Século XXI*. Lisboa: Civilização Editora.

DURÁN, Erica Vivianne Vivar (s/d) - *El Modelo de Congruencia de Objectivos de Ralph Tyler*. [En línea]. Ministerio de Educación del Chile: Red Maestros de Maestros. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.rmm.cl/index_sub0.php?id_portal=709>, accedido en 6 de abril de 2012.

ECO, Umberto (2003) – *Como se faz uma Tese em Ciências Humanas.* 10ª ed. Barcarena: Editorial Presença.

ELECTROSERTEC (2000) - *Telelupa Twinkle Spectrum.* [En línea]. Lisboa: Electrosertec. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://netin.ese.ipcb.pt/kit/Programas%20CD/ATs/ElectroSertec/Website/produtos/twinklespectrum.htm>, accedido en 26 de marzo de 2013.

ESPADA, Renato Luís (2004) – *Aplicações do Braille à Escrita da Música no Contexto das Novas Tecnologias. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo CD/DVD]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. DVD nº 2. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 3.

ESTRADA, Maria Fernanda [et al] (2004) – *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

FERNANDES, António do Nascimento Palma (1956) – *Elementos de Geometria*. Lisboa: Livraria Didáctica.

FERNANDES, Jorge (2004) – *Leitores de Ecrã, Braille e Voz Sintéctica. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete Referência Cultural. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 3.

GARAY, Edgardo José Avilés (2004) – *Teoría Curricular*. [En línea]. Puerto Rico: Colegio de la Educación de la Pontificia Universidad Católica. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.pucpr.edu/facultad/ejaviles/ED%20627%20PDF%20Files/Teor%C3%ADa%20Curricular.pdf>, accedido en 6 de abril de 2012.

GATES, Bill (1995) – *Rumo ao Futuro*. Alfragide. McGraw Hill de Portugal Lda.

GATES, Bill (1999) – *Negócios à Velocidade do Pensamento com um Sistema Nervoso Digital*. Braga: Tilgráfica.

GLEITMAN, H (1999): *Psicologia*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. Pp 777-834.

GONÇALVES DA SILVA, Artur Olímpio Ferreira (2007) – *As Pessoas Deficientes visuais e o acesso à informação nas Bibliotecas Municipais em Portugal*. Madrid: UCM. Tese de Doutoramento.

GOVERNO DE PORTUGAL (1930) - *Decreto nº 18 373*. D.R. nº 117, I Série (22 de Maio). Pp. 923-924. Aprova o método de leitura e escrita do sistema braille para ser utilizado pelas pessoas cegas em conformidade com a ortografia oficial da época.

GOVERNO DE PORTUGAL (1934) - *Decreto nº 23 735.* (03 de Abril). Pp. 426-429. Aprova o Regulamento de Exames de Estado para o Magistério Primário, Elementar, Infantil e Especial de pessoas deficientes, incluindo as deficientes visuais.

GOVERNO DE PORTUGAL (1946) - *Decreto nº 35 801.* D.R. nº 181, I Série (13 de Agosto). Pp. 730-731. Promulga a lei que oficializa o ensino das pessoas invidentes em Portugal.

GOVERNO DE PORTUGAL (1977) - *Decreto-Lei nº 174/77.* D.R. nº 101, I Série (22 de Maio). Define o o Regime Escolar dos alunos que frequentam os Ensinos Preparatório ou Secundário e sejam portadores de uma qualquer deficiência e são, também, definidos apoios específicos tanto para a frequência das aulas como para a prestação de exames. Foi revogado pelo decreto-lei 319/91.

GOVERNO DE PORTUGAL (1990) - *Decreto-Lei nº 35/90*. D.R. nº 21, I Série (22 de Março). Pp. 350-353. Estabelece a frequência de escolaridade para os alunos com necessidades educativas específicas e por este facto constitui um marco histórico.

GOVERNO DE PORTUGAL (1991) - *Decreto-Lei nº 319/91.* D.R. nº 193, I Série-A (23 de Agosto). Pp. 4389-4393. Define o o Regime Educativo Especial a ser aplicado aos alunos com necessidades educativas especiais. Revoga os Decretos-Lei 174/77 e 84/78.

GOVERNO DE PORTUGAL (1992) - *Decreto-Lei nº 189/92*. D.R. nº 203, I Série-A (03 de Setembro). Pp. 4202-4210. Determina o novo regime de acesso ao ensino superior para todos os alunos, incluindo os portadores de deficiência.

GOVERNO DE PORTUGAL (1997) – *Despacho Conjunto nº 105/97.* DR. Nº 149, II Série (01 de Julho). P. 7544. Estabelece o regime aplicável à prestação de serviços de apoio educativo, de acordo com os princípios consagrados na Lei de Bases do Sistema Educativo.

GOVERNO DE PORTUGAL (2001) - *Decreto-Lei 6/2001*. DR Nº 15, I Série A (18 de Janeiro). Estabelece os princípios orientadores do ensino básico bem como da avaliação das aprendizagens e do processo do desenvolvimento do currículo nacional.

GOVERNO DE PORTUGAL (2001) - *Decreto-Lei nº 140/2001*. D.R. nº 96, I Série A (24 de Abril). Diploma de Competências Básicas em Tecnologias da Informação e da Comunicação.

GOVERNO DE PORTUGAL (2001a) - *Portaria nº 1013*. D.R. nº 193, I Série B (2001-08-21). Define quais as entidades que, sob a supervisão da UMIC-Agência para a Sociedade do Conhecimento, IP, têm competência para a tribuição de diplomas de Competências Básicas em Tecnologias da Informação e da Comunicação.

GOVERNO DE PORTUGAL (2002) - *Decreto-Lei nº 18/2002*. D.R. nº 24, I Série-A (29 de Janeiro). Pp.710-711.Estabelece regras clarificadores relativamente às pessoas portadores de deficiência, em acções de formação profissional, e aos os trabalhadores deficientes em situação de emprego protegido.

GOVERNO DE PORTUGAL (2008) – *Decreto-Lei n.º 3/2008, de 7 de Janeiro*. Define os apoios especializados a prestar na educação pré-escolar e nos ensinos básico e secundário dos sectores público, particular e cooperativo.

GOVERNO DE PORTUGAL (2013) – Portugal, Primeiros Resultados PISA 2012. [En línea]. En INTERNET no sitio <URL : http://www.projavi.mec.pt/np4/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=64&fileName=PISA2012_PrimeirosResultados_PORTUGAL.pdf>, accedido en 2 de enero de 2014

GOVERNO FEDERAL DO BRASIL (2008) - *O Sistema Braille no Brasil*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.ibc.gov.br/?itemid=10235>. Accedido en 25 septiembre de 2012.
GRAU SABATÉ, Xavier (coordinador) (2004) - *Tecnología y discapacidad visual. Necesidades tecnológicas y aplicación en la vida diaria de las personas con ceguera y deficiencia visual.* 1ª ed. [En línea]. Madrid. ONCE. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.once.es/appdocumentos/once/prod/SS-PUB-CL-Tecnologia%20y%20discapacidad%20visual.txt>, accedido en 8 octubre de 2012.

GUERRA, José Adelino (2004) – *Profissões e Enquadramento Legal. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1981) - *Integração e reintegração social de deficientes. "Margem: revista bimestral de educação especial".* Lisboa: Centro de Educação Especial. Nº 21 (Janeiro-Fevereiro). P. 20.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1989) - *Eliminação de barreiras sociais e culturais: deficientes, terceira idade, doentes: acessibilidade à leitura e à cultura. "Gerontologia: revista da UITI".* Lisboa: Universidade Internacional para a Terceira Idade. Nº 44 (Outubro-Dezembro). Pp. 18-27.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1991) - *Entrevista com o Engº Silva Graça, Director do Centro de Suporte para Deficientes da IBM Portuguesa: a propósito de equipamento informático para cegos e amblíopes e para outros Deficientes. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Pelouro da Cultura / Biblioteca Municipal Camões. Nº 8 (Julho).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1991a) - *Valorização sócio-intelectual dos munícipes lisboetas deficientes, idosos e doentes desta cidade. «Gerontologia: Revista da UITI».* Lisboa: Universidade Internacional para a Terceira Idade, Lisboa. Nºs 51-52 (Julho-Dezembro). Pp. 3-9.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1992) - *Conferência Europeia «Família e Pessoa com Deficiência: Realidades e Oportunidades», com depoimentos do Coronel Vila-Lobos, do Dr. Francisco Alves e da Drª Guida Faria. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Pelouro da Cultura / Biblioteca Municipal Camões. Nº 18 (Maio).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1992a) - *Curso básico de formação para Técnicos de Ensino Especial. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Pelouro da Cultura / Biblioteca Municipal Camões. Nº 16 (Março).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1992b) - *Jornadas de Subvisão por iniciativa e organizadas pelo Serviço Universitário de Oftalmologia do Hospital de Egas Moniz. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Pelouro da Cultura / Biblioteca Municipal Camões. Nº 16 (Março).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1992c) - *Mais uma exposição para cegos em Lisboa: «Escultura para Tocar». "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Pelouro da Cultura / Biblioteca Municipal Camões. Nº 19 (Junho).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1992d) - *Seminário «A educação dos cegos e amblíopes: que problemas, que soluções»: breve abordagem e conclusões. «Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa».* Lisboa: Pelouro da Cultura / Biblioteca Municipal Camões. Nº 24 (Novembro).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1995) - *As pessoas cegas da República de Angola no quadro tiflológico dos PALOP e da Europa: entrevista a Manuel Domingos Tiago, Presidente da Associação Nacional de Apoio aos Deficientes Visuais da República de Angola. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa"*. Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nºs 61-

62.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1995a) - *Mais um elemento importante para que a história da tiflologia registe: o fisioterapeuta Salvino Ferreira em entrevista. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nº 58 (Setembro).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1996) - *Critérios de produção e de publicação braillográfica. "Cadernos de Educação"*. Lisboa: Instituto Piaget. Nº 12 (Julho). Pp. 13-15.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1996a) - *Entrevista com o Mestre António Rebelo acerca da problemática das pessoas surdocegas em Portugal. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nº 63 (Fevereiro).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1996b) - *Gabinete de Referência Cultural: Pólo Interactivo de Recursos Especiais. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nº 66 (Maio).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1997) - *Reflexões sobre o som como fonte de informação e fenómeno tiflo-sócio-comunicacional. «Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa».* Lisboa: Gabinete de Referência Cultural, nº 75 (Fevereiro).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1998) - *A produção de som em formato áudio e o livro electrónico. "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa"*. Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nºs 86-87.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1998a) – *As Vantagens da Tecnologização da Tiflografia: Contributos Tiflológicos para um Alargamento do Paradigma Comunicacional.* Lisboa: Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da UNL.

Tese de Doutoramento em Ciências da Comunicação, na Especialidade Comunicação e Cultura, defendida na Universidade Nova de Lisboa no dia 28 de enero de1999.
GUERREIRO, Augusto Deodato (1998b) - *Reflexões sobre o braille no contexto logográfico: génese e evolução signográfica. «Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa»*. Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nºs 88-89 (Março-Abril).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1998c) - *Síntese no espaço e no tempo de uma especificidade cultural em Portugal: passos histórico-culturais dos materiais de leitura para as pessoas cegas em Portugal. «Literatura Actual de Almada: Antologia»*. Almada: Câmara Municipal. Pp. 390-398.

GUERREIRO, Augusto Deodato (1998d) - *Virtual Vision: um leitor de ecrã para cegos que corre em ambiente WINDOWS. «Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa»*. Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nºs 92-97 (Julho-Dezembro).

GUERREIRO, Augusto Deodato (1999) - *Encontro Lusófono «a tiflologia na cultura de língua portuguesa». "Dinamização Cultural: Revista Áudio da Câmara Municipal de Lisboa".* Lisboa: Gabinete de Referência Cultural. Nºs 100-101 (Março-Abril).

GUERREIRO, Augusto Deodato (2000) – *Para uma nova comunicação dos sentidos*. Lisboa: Livros SNR.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2000a) - *O Braille como instrumento comunicacional e intelectossocial. "Luís Braille: Revista Oficial da ACAPO".* Lisboa: ACAPO. Nº 37 (Abril-Junho). Pp. 23-26.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2000b) - *O som e a suplência dos sentidos como meio de sociabilidade e interacção humana: notas para uma reflexão aprofundada sobre vertentes tiflológicas. "Actas da XII World Conference of DBI" (Edição em inglês publicada em caracteres comuns e no formato CD-*

ROM). Lisboa: Casa Pia. Pp. 446-457.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2001) - *As novas tecnologias e a emergência de um novo paradigma comunicacional. «Comunicação e Sociedade».* Braga: Universidade do Minho / Instituto de Ciências Sociais. Nºs 1-2, pp. 195-207.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2001a) - *Comunicação e cultura: binómio interactivo para uma inclusão mais profícua. «Actas das 1ªs Jornadas em Reabilitação e Inserção Social».* Lisboa: ISPA.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2001b) - *Cultura dos sentidos e ampliação do paradigma comunicacional: uma vertente especial na interlocução e interacção humana. «Caleidoscópio: Revista de Comunicação e Cultura».* Lisboa: Universidade Lusófona / Departamento de Ciências da Comunicação e da Informação. Nº 1 (2º semestre). Pp. 97-107.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2003) – *Para um desenvolvimento global inclusivo: uma missão na tolerância, na solidariedade e na esperança. «Actas do 1º Encontro da Licenciatura em Reabilitação e Inserção Social: Globalização, Solidariedade e Inserção Social» (dias 27 a 30 de Novembro de 2002)*. Lisboa: ISPA. Pp. 43-50.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2006) – *Imagem e cultura na inclusão sociocomunicacional. «Vértice»*. Lisboa: Caminho (Janeiro-Fevereiro). Pp. 57-67.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2007) – *Sociocomunicabilidade e Inclusão.* IN Cadernos Sociedade e Trabalho (VIII): Integração das Pessoas com Deficiência. Lisboa: Ministério do Trabalho e da Solidariedade Social.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2011) – *Tifloperceptibilidade avançada vs sociocomunicabilidade.* IN Comunicar e Interagir. Lisboa: Edições Universitárias Lusófonas.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2011a) - *Literacia Braille e Inclusão*. Lisboa: Camara Municipal de Lisboa.
GUERREIRO, Augusto Deodato (2013) – *Comunicação e Cultura Inclusivas*. Lisboa: Edições Universitárias Lusófona/ULHT.

GUERREIRO, Augusto Deodato (2014) – *História Breve dos Meios de Comunicação*. Lisboa: EDLARS.

GUERRINHA, Dalila (2004) – *Uma luz na história*. Lisboa: Edições Colibri.

GUIMARÃES, Rui C. & CABRAL, José A. Sarsfield (1997) – E*statística.* Alfragide: Editora McGrawHill de Portugal Lda.

HALL, Andreia [et al] (2011) – *Grande Maratona de Estatística no SPSS*. Lisboa: Escolar Editora.

HAMPSHIRE, Barry (1980) - *Establishing Braille Productions Facilities in Developing Countrie*s. Estocolmo: Swedish Federation of The Visually Handicapped.

HILBERT, David (2003) – *Fundamentos de Geometría.* Lisboa: Colecção Trajectos Ciência. (título original GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE (1971), sendo a revisão científica da tradução da responsabilidade de A. J. Franco de Oliveira).

HORTON, J. Kirk (2000) – *Educação de Alunos Deficientes Visuais em Escolas Regulares*. Instituto de Inovação Educacional

IFRAH, Georges (1995) – *Histoire Universel des Chifres*. Paris: Editions Robert Laffond S.A.

INDEXBRAILLE (2013) - *Everest-D V4 - Single sheet fed Braille embosser.* [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL:

http://www.indexbraille.com/en-us/braille-embossers/everest-d-v4?gclid=CKanhJ-vgbYCFczHtAodwR4AJQ>, accedido en 16 de marzo de 2013.

INDEXBRAILLE (2013a) - *Basic-D V4 - World leading tractor fed Braille embosser.* [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.indexbraille.com/en-us/braille-embossers/basic-d-v4?gclid=CKeD1YyugbYCFXDKtAoda2oA7A>, accedido en 16 de marzo de 2013.

JONNAERT, Philippe (2012) – *Competências e Socioconstrutivismo.* Lisboa: Instituto Piaget.

KAREL, Neijs (1961) - *Las cartillas de alfabetización: preparación, evaluación y empleo.* Paris: UNESCO.

KOCHE, J. C. (1997) – *Fundamentos de metodologia científica: Teoria da ciência e prática da pesquisa.* 14ª Ed. Petrópolis: Vozes.

LATORRE, António [et al] (2005) - *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa*. Barcelona: Ediciones Experiencia S.L.

LEBRUN, Marcel (2008) – *Teoria e Métodos Pedagógicos para Ensinar e Aprender*. Lisboa: Instituto Piaget.

LEITE, Carlinda [et al] (1993) – *Avaliar a Avaliação*. Colecção Cadernos Pedagógicos. Porto: Edições Asa.

LERPARAVER (2010) – *I Concurso Nacional de Textos Inclusivos*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.lerparaver.com/noticias/i-concurso-nacional-textos-inclusivos-premio-assis>, accedido en 04 de enero de 2013.

LERPARAVER (2010) – *Programadores cegos criam aplicações grátis para invisuais.* [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL:

http://www.lerparaver.com/noticias/programadores-cegos-criam-aplicacao-gratis>, accedido en 04 de enero de 2013.

LOPES, Ana Vieira [et al] (1990) – *Actividades Matemáticas na Sala de Aula*. Lisboa: Texto Editora.

LOPES, M. C. & PINTO, A. (1999) – *Competitividade, Aprendizagens e Soluções Pedagógicas*. Oeiras: Celta Editora.

LÓPEZ JUSTICIA, Maria Dolores (2004) – *Aspectos Evolutivos y Educativos de la Deficiencia Visual.* La Coruña: Netbiblo S.A.

LÓPEZ YEPES, José (1996) – *La aventura de la investigación científica. Guia del investigador y del director de investigación*. Madrid: Editorial Síntesis.

LORENZO MARTIN, Rocio (2009) - *Los contenidos de la Educación Pianística en los Conservatorios de Música: Una propuesta Integrada*. Universidad de Granada. Tesis Doctoral.

LOWENFELD, Berthold (1974) – *Psycological considerations. "Visually Handicap Child in School"*. London: Ed. Berthold Lowenfeld.

LUNA LOMBARDI, Raúl y ESPINOSA RABANAL, José Alfredo (coordinadores), (2012) – *Educación Inclusiva: Personas con Discapacidad Visual*. Madrid: Ministerio de Educación - Instituto de Tecnologías Educativas. ISBN: 978-84-369-5194-3

M. HAVLIK, Jarmila [et al] (2000) – *Informática y Discapacidad: Fundamentos y aplicaciones*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

MARCELLY, Lessandra & PENTEADO, Miriam Godoy (2011) – *A escrita matemática em braille*. Recife. Comunicação apresentada na XIII Conferência IberoAmericana em Educação Matemática.

MARTÍNEZ-LIÉBANA, Ismael (2004) – *El Sistema Braille o de la Palabra “Digital” a la Inteligencia Táctil. Contribuciones a la Fundamentación de una metafísica Volitivotáctil.* [En línea]. MADRID: UCM. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.cepmalaga.com/actividades/ Interedvisual/ftp/sistemaBraille_iml.doc>, accedido en 8 de marzo de 2013.

MARTINS, Gilberto de Andrade & DOMINGUES, Osmar (2011) – *Estatística Geral e Aplicada*. São Paulo: Atlas.

MASCARENHAS, Pedro (2004) – Dr. Assis Milton: Um Farol num Planeta sem cores. [En línea]. In SuperGoa in INTERNET no sitio <URL: http://www.supergoa.com/pt/read/news_noticia.asp?c_news=467>, accedido en 03 de enero de 2014.

MEIRINHOS, Manuel & OSÓRIO, António (2010) - *O estudo de caso como estratégia de investigação em educação*. In EDUSER, revista de educação, Vol 2(2). Instituto Politécnico de Bragança.

MICROSOFT (2012) – *Nokia Lume 920 Suporte*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.nokia.com/pt-pt/apoio/produto/lumia920/>, accedido en 06 de enero de 2013.

MILTON, Assis (2004) – *Formação Profissional e Emprego: O Cerne da Questão. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

MILTON, Assis (2005) – *Estrelas no meu céu escuro*. Lisboa: Rodrigues – Assis Milton Ovídio.

MIÑAMBRES ABAD, Amparo (2004) – *Atención educativa al alumnado con dificultades de visión*. Málaga: Ediciones Aljibe, S.L.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2007) - *Programa de Matemática Para o Ensino Básico*. [En línea]. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71>, accedido en 29 de junio de 2012.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA (2012) – *Nota à comunicação social*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=346&fileName=nota_de_imprensa_PISA2009.pdf>, accedido en10 de julio de 2012.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA do GOVERNO DE PORTUGAL (2013) - *PISA 2012*, *Portugal* - Primeiros *Resultados.* [En línea]. Lisboa: PROJAVI. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.projavi.mec.pt/np4/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=64&fileName=PISA2012_PrimeirosResultados_PORTUGAL.pdf>, accedido en 20 de enero de 2014.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE DEL GOBIERNO DE ESPAÑA (2014) – *PISA 2012. Informe y Contexto.* [En línea]. Madrid: Secretaria General Técnica. Disponible en INTERNET en el sitio <URL http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012.pdf?documentId=0901e72b8195d643>, accedido en 20 de enero de 2014.

MISSÃO PARA A SOCIEDADE DE INFORMAÇÃO (1997) – *Livro Verde para a Sociedade de Informação*. Lisboa: MCI/MCT.

MONTEIRO, Orlando de Jesus (2004) – *Permissões Braille: História, Actividade Desenvolvida e Projectos. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 3.

MONTORO, M.J. (1992) – *Los* cieg*os en la Historia*. Volumen III. Madrid, ONCE.

MOREIRA, J. António & MONTEIRO, Angélica (2012) – *Ensinar e aprender Online com Tecnologias Digitais*. Porto: Porto Editora.

MORIN, Edgar (s/d) - *Ciência com consciência*. Lisboa, Europa-América. Pp. 25-37; 237-255.

MORROW, Raymond Allen & TORRES, Carlos Alberto (1997) - *Teoria Social da Educação*. Porto: Edições Afrontamento.

MUÑOZ SEVILLA, José António (2004) - *Tecnologías específicas para personas ciegas y deficientes visuales*. In Grau Sabaté, Xavier - *Tecnología y discapacidad visual. Necesidades tecnológicas y aplicaciones en la vida diaria de las personas con ceguera y deficiencia visual*. Madrid: ONCE.

MURTEIRA, Bento; RIBEIRO, Carlos Silva; SILVA, João Andrade e PIMENTA, Carlos (2010) – *Introdução à Estatística*. Lisboa: Escolar Editora.

NASCIMENTO, Rui (2004) – *Legislação, Aplicação e Proficuidade*. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal», [Registo sonoro]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete Referência Cultural (Junho). 2 CD + 3 DVD, CD nº 1.

NELSON, Steve; DOLLIVER, Kaarin (1997) – *Microsoft frontpage 98 at a glance*. Redmond: Microsoft Press.

NÓVOA A. (1992) – *As Organizações Escolares em Análise*. Lisboa: D. Quixote.

OCHAÍTA, E. (1993) - *Ceguera y desarrollo psicológico*. In Psicología de la ceguera. Madrid: Alianza Editorial. Pp. 111-202.

OLIVA, F. P. (2000) – *Do Braille à Braillologia. Necessidade de Formação Braillológica.* Lisboa: Comissão Braille.
OLIVA, Filipe Pereira (2001) – *O Associativismo entre os Cegos em Portugal*. «Cadernos GESTA-MP». [En línea]. Lisboa: GESTA-MP, ano I, nº 1 (Julho). Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.gesta.org/gesta01/artigo02.htm>, accedido en 21 de diciembre de 2013.

OLIVA, Filipe Pereira (2002) – *Luís Braille, O Homem*. Lisboa: Comissão Braille. «Conferência realizada no auditório do SNRIPD, em 4 de Janeiro» [En línea]. Lisboa: Comissão Braille. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.cb.msst.gov.pt/not01.htm>, accedido en 20 de diciembre de 2013.

OLIVA, Filipe Pereira (2004) – *Grafia Braille Aplicada à Lingua Portuguesa.* Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal» [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural (Junho). 2 CD + 3 DVD, DVD nº 3.

OLIVEIRA, Ferraz (2004) – *Magia da Luz, Magia da Visão*. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal» [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 2.

OPTOBIONICS (2004) - *Artificial Silicon Retina*. [En línea]. EUA: Optobionics. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.optobionics.com/index.asp?pageid=13>, accedido en 12 de marzo de 2013.

ORGANIZACIÓN NACIONAL DE CIEGOS DE ESPAÑA (2003) – Página Principal [En línea]. Madrid: ONCE. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.once.es/>, accedido en 15 de julio de 2013.

OROSCO, Alejandro Iván Castro (2004) – *Descripción gráfica y signografía braille del Código Matemático Unificado.* [En línea]. Vera Cruz, México. Comunicação apresentada no II Congresso Virtual INTEREDVISUAL sobre instrumento de acesso à comunicação, à educação e à cultura das pessoas cegas. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.cepmalaga.com/actividades/interedvisual/suportr_iicv/cmu_88_98.doc>, accedido en 2 de diciembre de 2012.

PAIVA, Júlio Damas (2004) – *Orientação e Mobilidade. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural (Junho). 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

PAPPAS, Theoni (1995) – *Fascínios da Matemática*. Editora Replicação, Lda. Lisboa.

PARDAL L. (1991) – *As Organizações Escolares em Análise*. Aveiro: Universidade de Aveiro. Tese de doutoramento.

PEREIRA Alexandre; CARLOS Poupa (2004) - *Como Escrever uma Tese, monografia ou livro científico usando o Word*. 3ª ed . LISBOA: Edições Sílabo.

PEREIRA, Carlos (2004) – *Ajudas Técnicas. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

PÉREZ PÉREZ, José Raul (1998) – *Una biblioteca para los discapacitados*. Salamanca: Universidad Pontificia de Salamanca.

PEREZ, R & MARTÍN, J. [1989] – *Diagnóstico, Evaluación y Toma de Decisiones*. Madrid: Rialp.

PERIGAL, Henry (1874) - *On Geometric Dissections and Transformations*. In The Messengers of Mathematics. [En línea]. England: Macmilan and Co. Pp.103-106. Disponible en INTERNET en el sitio <URL:http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/perigal/perigal.html>, accedido en 28 de diciembre de 2012.

PINTO, Conceição Alves (1995) – *Sociologia da Escola*. Alfragide: McGraw-Hill.

PINTO-FERREIRA [et al] (2007) *- PISA 2006 – COMPETÊNCIAS CIENTÍFICAS DOS ALUNOS PORTUGUESES*. [En línea]. Lisboa: Ministério da Educação. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.gave.min-edu.pt>, accedido en 10 de julio de 2012

PONTE, J.P. [et al] (2007) - *Programa Nacional do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

PORTUGAL TELECOM (2004) - *TMN lança telemóvel para cegos.* [En línea]. Lisboa: PT. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.telecom.pt/InternetResource/PTSite/PT/Canais/SobreaPT/noticiasPT/tmndix.htm>, accedido en 4 de febrero de 2013.

PRUDHOMMEAU, M. (1975): *Educación de la Infancia anormal*. Barcelona: Editorial Planeta S.A.

PUIG ADAM, P. (1986) - *Curso de geometría métrica (volúmenes 1 y 2)* Madrid: Ed. Euler

RAMOS, Eliana & BENTO, Sandra (2006) – *As competências: quando e como surgiram.* In CEITIL, Mário (Organizador) (2006) – *Gestão e Desenvolvimento de Competências*. Lisboa: Edições Sílabo. Pp. 87-118.

REBELO, António (2004) – *A Surdocegueira: Profilaxia, Génese e Desenvolvimento Educacional. Comunicação apresentada no Congresso*

Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal» [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 2.
REDÓN GÓMEZ, A. (2000) - *Geometría paso a paso*. Volumen1. Madrid: Ed. Tébar.

REDEINCLUSÃO (s/d) – *Projecto REDEInclusão*. [En linea]. Aveiro: Universidade de Aveiro. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.redeinclusao.pt/index.php>, accedido en 06 de diciembre de 2014.

REINO, Vítor (2000) – *Ensino/Aprendizagem do Braille*. «Textos de apoio à deficiência visual». [En línea]. Coimbra: DREC, Núcleo de Apoio à deficiência visual. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.drec.min-edu.pt/nadv/txt-ensinoaprendizagem.htm>, accedido en 18 de diciembre de 2012.

REIS, Elizabeth (2008) - *Estatística Descritiva.* Lisboa: Edições Sílabo.

REIS, Elizabeth; CALAPEZ, Teresa; ANDARE, Rosa & MELO, Paulo (2007) – *Estatística Aplicada (volume 1)*. Lisboa: Edições Sílabo.

RODRIGUES, Alexandre; RODRIGUES, Aquilino (2004) – *Das Acessibilidades na INTERNET à Estruturação de Livros Falados. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 3.

RODRIGUES, Fernando Carvalho (Direcção) (1992) – *Didáctica das Matemáticas, Enciclopédia Temática Ilustrada*. Lisboa: Prepress, Lda.

RODRIGUES, Isidoro da Eira (2004) – *Associatismo Tiflológico*: *Educação, e Cultura. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência

Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

ROMERO DE TEJADA, Manuel Costa (2004) - *Historia de los Revisores de Pantalla* [En línea]. Barcelona: FCMC. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.funcaragol.org/html/histrpdv.htm>, accedido en 23 de diciembre de 2012.

RUIZ RUIZ, J. M. (1996) - *Cómo hacer una Evaluación de Centros Educativos- Madrid: Edit. Universitas.*

RUIZ RUIZ, J. M. (1998) - *Cómo Mejorar la Institución Educativa. Evaluación de las Innovaciones*. Santa Fé de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

RUIZ RUIZ, J. M. (2001) - *Las Estrategias en las Adaptaciones Curriculares*. Madrid: Edit. Universitas.

RUIZ RUIZ, J. M. (2005a) - *Teoría del Curriculum: Diseño e Innovación Curricular*. Edit. G.E.U. Madrid.

RUIZ RUIZ, J. M. (2005b) - *Diseño de Estrategias Metodológicas en las adaptaciones curriculares según los ECTS*. Granada: Edit. G.E.U.

SÁ, Carlos Correia de & ROCHA, Jorge (editores) (2010) – *Treze Viagens pelo mundo da Matemática.* Porto: Universidade do Porto.

SAMAGAIO, Estevão Zulmiro Braga ; PACHECO, Lucília Moreira Soares da Cunha ; IGLÉSIA, Maria Dolores Dominguez (2003) – *A Acção da Misericórdia do Porto na Área da Deficiência*. Porto: Santa Casa da Misericórdia.

SAMPAIO, José (2004) – *O IEFP na Formação Profissional e Emprego. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflolo gia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 1.

SANCHES, Isabel Rodrigues (1995) – *Professores de Educação Especial.* Porto: Porto Editora.

SANCHES, Isabel & TEODORO, António (2006) – *Da integração à inclusão escolar: cruzando perspectivas e conceitos*. In Revista Lusófona de Educação, 2006, 8, 63-83. Lisboa: ULHT.

SANTA CASA DA MISERICÓRDIA DO PORTO (2000) - *Ensino especial: Instituto de S. Manuel* . [En línea]. Porto: SCMP. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.scmp.pt/ism_pt.htm>, accedido en 15 de enero de 2013.

SANTOS, Arnaldo (2000) – *Ensino a distância & tecnologias de informação.* Lisboa: Lidel.

SANTOS, Dora (2013) – *Gerações de Ensino Profissional*. Lisboa: Agência Nacional para a Qualificação e o Ensino Profissional, I. P.

SANTOS, Belmira (2007) – *Comunidade Escolar e Inclusão*. Lisboa: Instituto Piaget.

SANTOS, Nuno [et al] (s/d) – Alunos Cegos na Sala de Aula. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.apm.pt/files/_Co_SantosVentura&Cesar_4867d5e05f0ce.pdf>, accedido en 19 de marzo de 2013.

SCANSOFT (2000) - *About Talks.* [En línea]. EUA, Burlington: Scansoft. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.tbss.de/produkte/talx/index_e.shtml>, accedido en 23 de diciembre de 2012.

Secretariado Nacional para a Reabilitação e Integração das Pessoas com Deficiência (1999) - *Acessibilidade: Exemplos em Portugal*. Lisboa: SNRIPD

SERRÃO, Anabela (2011) - *PISA 2009 – O desempenho dos alunos portugueses*. [En línea]. Lisboa: GAVE- Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=271&fileName=Apres_pisa_ovar.pdf> , accedido en 11 de julio de 2012.

SERRÃO, Anabela [et al] (2010) *- PISA 2009 – Competências doa alunos portugueses*. [En línea]. Lisboa: GAVE-Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.gave.min-edu.pt>, accedido en 10 de julio de 2012.

SERRAZINA, Lurdes, organizadora (2002) – *Cadernos de Formação de Professores (3): A Formação Para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico*. Porto: Porto Editora.

SHARIGUIN, I. (1986) - *Problemas de geometría. Planimetría.* Moscovo: Editorial Mir.

SILVA, José Sebastião e (2000) – *Textos Didácticos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Volumes I, II e III).

SILVA, José Sebastião e (2000a) – *A Matemática na Antiguidade*. Lisboa: SPM.

SILVA, Tomaz Tadeu (2000) – *Teorias do Currículo*. Lisboa: Porto Editora.

SOARES, Sónia Maria Pereira (2011) - *A Receptividade dos empresários face à inclusão profissional da pessoa portadora de deficiência mental*. [En línea]. Lisboa: Escola Superior de Educação Almeida Garrett (Tese de mestrado orientada pelo Professor Doutor Luís Sousa). Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://recil.grupolusofona.pt/jspui/bitstream/10437/1658/1/S%C3%B3nia%20Soares.pdf>, accedido en 24 octubre de 2012.

SOCIEDADE DE ASSISTÊNCIA AOS CEGOS (2000) - *Breve Histórico sobre a Cegueira e Educação Especial* . [En línea]. Brasil: SAC. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http:// www.sac.org.br>, accedido en 20 de marzo de 2013.

SOUSA, Ana Paula Pombo (2012) – *Comunicar e Educar para a Inclusão e Dignificação Humana. A Didática do Sistema Braille e o Desempenho Académico dos Alunos com Deficiência Visual na Disciplina de Língua Portuguesa nas Escolas de Referência*. Lisboa: Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias. (Relatório de Investigação no âmbito de Tese de Doutoramento orientada pelo Professor Augusto Deodato Guerreiro).

STAKE. R. E. (1999) - *Investigación Con Estudio de Casos*. Madrid: Morata. Vásquez.

STEWART, Ian (1996) – *Os Problemas da Matemática*. Lisboa: Gradiva Publicações, Lda.

STRUIK, J. Dirk (1997) – *História Concisa da Matemática*. Lisboa: Gradiva Publicações, Lda.

STUBBS, Sue (2008) – *Educação Inclusiva. Onde existem poucos recursos.* [En linea]. Oslo: The Atlas Atlantic. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://redeinclusao.web.ua.pt/files/fl_68.pdf>, accedido en 06 de diciembre de 2014.

TAPIA, Ivan (2002) – *Historia de Educación de Ciegos.* [En línea]. Buenos Aires: Fundación Artistas Discapacitados. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.integrando.org.ar/datosdeinteres/it_historia_educacion_ciegos.htm>, accedido en 01 de marzo de 2013.

TECHZINE (2013) – *B-Touch: um celular para deficientes visuais*. [En línea]. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.techzine.com.br/arquivo/b-touch-um-celular-para-deficientes-visuais/>, accedido en 10 de marzo de 2013.

TILSTONE, Christina [et al] (2005) – *Promover a Educação Inclusiva*. Lisboa: Instituto Piaget.

TORRECILLA DELGADO, Felipe (1996) – *Las nuevas tecnologías de las personas discapacitadas y las personas mayores en el Plan Nacional I+D 1996-1999*. [En línea]. Madrid: ONCE. Seminário. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://www.bduimp.es/archivo/conferencias/pdf/96_10065_21_FelipeTorrecilla_idc10892.pdf >, accedido en 31 de diciembre de 2012.

VELOSO, Eduardo (1998) – *Geometria. Temas Actuais*. Lisboa: Ministério da Educação e Instituto de Inovação Educacional.

VILAR, Alcino Matos (1992) - *A Avaliação - Um Novo Discurso?* Colecção Cadernos Pedagógicos. Porto: Edições ASA.

VILAR, Alcino Matos (1993) - *A Avaliação doa Alunos do Ensino Básico.* Colecção Cadernos Pedagógicos. Porto: Edições ASA.

VIEIRA, Rui Marques (2005) – *Estratégias de Ensino / Aprendizagem*. Lisboa: Instituto Piaget.

WEINHOLTZ, Fernando Bívar (2004) – *Antecedentes Históricos da Cegueira em Portugal. Comunicação apresentada no Congresso Nacional «100 Anos de Tiflologia em Portugal»* [Registo vídeo]. Lisboa: Câmara Municipal/Departamento de Bibliotecas e Arquivos/Gabinete de Referência Cultural, Junho 2004. 2 CD + 3 DVD, DVD nº 2.

Wu, H. (2001) - *On the learning of Algebra*. [En línea]. United States of America: American Mathematical Society. Disponible en INTERNERT en sitio <URL: http://math.berkeley.edu/~wu/>, accedido en 14 de enero de 2013.
Wu, H. (2008) – *Fractions, Decimals and Rational Numbers*. [En línea]. United States of America: American Mathematical Society. Disponible en INTERNERT en el sitio <URL: http://math.berkeley.edu/~wu/>, accedido en 12 de enero de 2013.

YIN, R. (1993) - *Applications of case study research*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

ZABALZA, Miguel Ángel (2009) – *Diseño y Desarrollo Curricular.* [En línea]. Madrid: Narcea, S. A. Ediciones. Disponible en INTERNET en el sitio <URL: http://infantil.unir.net/cursos/lecciones/ARCHIVOS_COMUNES/versiones_para_imprimir/GMEI02nuevo/TEMA_6_ACTIVIDADES_2.pdf>, accedido en 28 de diciembre de 2012.

9 - ANEXOS

9.1 - ANEXO I: TABLA DE FIGURAS

9.2 - ANEXO II: DECLARACIÓN DE LA APEDV

Tel. 218 310 760 • Fax 218 310 769
938 310 762 968 089 836
info@apedv.org.pt
www.apedv.org.pt
Av. João Paulo II Lote 5.25 -1º
1950-159 LISBOA

DECLARAÇÃO

Para os devidos efeitos se declara que o Professor Artur Olímpio Ferreira Gonçalves da Silva ministrou a disciplina de Matemática aos formandos do Curso de Telefonistas rececionistas, integrando dois alunos cegos e quatro com baixa visão, nas instalações da APEDV, às terças-feiras, das 9h00 às 10h30, desde 30 de Outubro de 2012 a 26 de Março de 2013, num total de 30 horas. Mais se declara que o módulo de Matemática não faz parte do referencial de formação do curso tendo sido realizado no âmbito de um trabalho académico.

Por ser verdade e nos ter sido solicitado se passa a presente declaração.

Pela APEDV

Mª da Graça Hidalgo
Coordenadora Pedagógica

Lisboa, 29 de Maio de 2013

UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu

IPSS Pessoa Coletiva de Utilidade Pública • DR 209 III série de 10-09-1980 • NIPC 501097643

9.3 - ANEXO III: THESYS SUMMARY

THESIS SUMMARY

I. TITLE

Teaching Mathematics to Students with Visual Impairments: Strategies and Pro-active Practices in the learning process.

II. INTRODUCTION

Nowadays, and in the different areas of knowledge, the pace of change occurs so rapidly, that is crucial to guarantee that every citizen has access to information.

People with Visual Impairments are sometimes in disadvantage in what access to information is concerned, and this reflects obviously in access to adequate teaching and, consequently, access to the labour market.

Bearing in mind that Mathematical Instruction/learning Mathematics enables students in general and, in particular, students with special educational needs to become individually and socially apt citizens, and that APEDV's courses do not provide Mathematics classes, the following problem, which is the core of the present investigation, has been set:

"Does the use of motivators learning strategies and methodologies to teach mathematics to students of the development professional courses of APEDV (Association for the Promotion of Employment of visually impaired people), enhance their competences?"

Faced with this problem, I took the initiative in October 2012, to contact the APEDV and express my great interest in providing to the students of this institution, a course in mathematics, which would involve two modules: one in geometry and other in statistics.

In the geometry module, it is additionally reinforced some aspects of Arithmetic and Algebra. In this module, students have the opportunity to broaden and deepen the capabilities of abstraction and conceptualization. This is particularly important to visual impaired people because it helps them in the building of mental maps process, which is very useful for them when moving from one point to another. With the study of statistics, students will be able to develop important socio-cognitive skills for an appropriate understanding of the socioeconomic and socio-political, in today's knowledge society phenomena.

III. SUMMARY

The case-study research was based in the results obtained from the experience of teaching a module of mathematics to a group of six students, from Telephonist/ Receptionist Training Course, during 30 hours (October 2012 - March 2013).

The work presented in this thesis can be divided essentially into three parts: the theoretical framework, the research context and experimental design. In the theoretical framework, it is discussed the Curriculum Issues, the Braille System, Assistive Technologies and Inclusive Education. A description of the main activities of the APEDV is made in the Research Context. The Experimental Design consists of two topics: The Case-study Methodology and Main Conclusions and New Curriculum Proposal.

In “The Case-study Methodology” is made a full description of the module, the strategies and methodologies used, the competencies that are intended to develop, the material resources available to trainees as well as the evaluation results. In the chapter dedicated to “Main Conclusions and New Curriculum Proposal” several conclusions resulting from the experience are drawn up and it is presented a new Curriculum Proposal to the Telephonist/ Receptionist and Massage Therapist / Physiotherapist Training Courses offered by APEDV.

Keywords: Learning, Braille, Curriculum, Competence, Mathematics Teaching, Inclusion, Student from APEDV, Visually Impaired People and Assistive technology for Blind People.

IV. RESULTS

As a result of the research, sixteen specific conclusions were developed (numbered from E1 to E16). Five of those specific conclusions are the following:

E1. The utilization of bank cards in the representation of golden rectangles and golden triangles, allowed the students **developed their manual skills, improved their sense of proportion and aesthetic, the socio-communicability and also to awake their curiosity for the surrounding environment**.

E13. Working with geometric solids, students **developed their tactile perception, improved their figurative sense, notion of symmetry and logic, spatial sense, the multifaceted design and synthesis**.

E14. Planning the budget for renovating a house, the students **worked on the analysis, the figurative sense, spatial sense, intelligibility, numeracy, symmetry, self-employment, teamwork, synthesis and socio-communicability**.

E15. The following table shows, for each student, the classification (level 1, 2 or 3) of his/hers responses to the 40 questions used for evaluation purposes during the classes.

Student	Number of responses		
	Level 3	Level 2	Level 1
André	37	3	0
Bento	29	11	0
Camilo	6	23	11
Daniel	37	3	0
Edite	4	25	11
Francisca	21	19	0

The results show that André and Daniel have responded correctly and independently to the majority (92.5%) of the questions; Bento responded autonomously 72.5% of the questions and, with a little help, he rightly responded to the remaining 27.5%; Francisca responded independently to 52.5% of the questions and 47.5% with a little help; Camilo just answered capably and autonomously, 15% of the questions; with a little help to 57.5% and 27.5% with a big help and Edite only responded independently to 10% of the questions, with little help responded to 62.5% of the questions and she needed a big help to answer the remain.

In the thesis, Figure 7.1.1-01, entitled "Bar chart on the qualifications of the students," provides, in percentage terms, an overview of the results obtained by students in these assessments.

E16. Taking, on one hand, into account the observed results related to the skills, knowledge and abilities worked in the first part of the training program, and on the other, the global performance of each student, it is possible to rank the set of students in the following manner (scale from 1 to 5, with 5 the higher level):

Student	Level of Proficiency
André	5
Bento	4,5
Camilo	3
Daniel	5
Edite	3
Francisca	4

V. CONCLUSIONS

The main important conclusions are the following:

G1. Within the Inclusion Settings, it is recommendable for governmental entities to provide at least the same support to institutions which purpose is to meet the needs of special-need students, such as APEDV, as the one which is given to regular schools.

G2. Each student had the freedom and autonomy to attend classes. Taking into account that the course was taught in a very informal manner, the high attendance rate reveals that the students were **very interested in the course** and, in particular, in the topics studied.

G3. In this course, students worked several abilities, acquired and developed new knowledge and new skills. Consequently, their **proficiency has increased**.

G4. To teach a course with impairment students, in particular with visual needs, necessarily lead to changes in the teacher's way of teaching. Those changes will unavoidably **contribute to professional and personal growth** of the course instructor.

G5. As consequence of this case study, I propose that **a mathematics course should be formally included in the APEDV's core curriculum**. Other similar institutions, either in Portugal or in other countries, could also integrate such course in theirs curriculums. Naturally, each institution from its own experience should make the necessary adjustments, that consider more suitable to its students.

G6. Nowadays, it is essential and fundamental to take advantage of the new technologies in the area of Information and Communication and use them to improve the learning environment for students with visual impairments. As future work, I suggest the development of two research lines. The first one related with the development of materials through the use of 3D printers. The second one related with the use of interactive tables, which allow students to share information with the course instructor and even with each other, in real time.